R. K. GORDIN

BUNI HAR BIR YOSH MATEMATIK BILISHI KERAK

R. K. Gordin

BUNI HAR BIR YOSH MATEMATIK BILISHI KERAK

MUMTM, 2003

So‘zboshi

Qadrli o‘quvchi! Modomiki Siz matematikani o‘rganishga qaror qilgan ekansiz, shuni aytishimiz lozimki, to‘g‘ri yo‘ldasiz. Zero matematika miya uchun eng yaxshi ozuqa, dunyoqarashni kengaytirish uchun eng yaxshi mashg‘ulotdir. Ushbu kitob esa matematikaning eng go‘zal bo‘limi hisoblanmish geometriyani o‘zlashtirishingizda Sizga yordam berishi uchun yozilgan, tarjima qilingan.

Kitobning o‘ziga xos jihatlaridan biri bunda asosiy urg‘u formula va chizmalarga emas, so‘zlarga berilgan. Ularni qunt bilan o‘qib, isbotlashga ahamiyat berishingizni tavsiya qilgan bo‘lar edik.

Tarjima bir guruh havaskor tarjimonlar, havaskor bo‘lmagan matematika o‘qituvchilari va bu fanning ixlosmandlari, ilmda boshqalarga nafi tegishini istovchi ko‘ngillilardan tuzilgan “Matematik tarjima” jamoasi tomonidan notijorat maqsadda amalga oshirilgan. Shuni inobatga olgan holda yo‘l qo‘ygan kamchiliklarimiz uchun Siz aziz o‘quvchidan va hurmatli ustozlarimizdan uzr so‘raymiz. Biror kamchilikka duch kelsangiz, bu haqda elektron pochta manzili (`dosikmusurmonov@gmail.com`) orqali xabar berib bizga katta yordam bergan bo‘lasiz.

Va albatta bizni shu darajaga yetkazgan ota-onamiz va ustozlarimizga minnatdorchilik izhor etamiz.

Tarjimonlar

So‘zboshi

Ushbu kitobning birinchi qismida maktabda vijdonan o‘qiydigan va sermazmun geometrik masalalar yechishni xohlaydigan ayrim o‘quvchilar uchun foydali bo‘lgan geometriya fani maktab kursining asosiy teoremalari hamda muhim faktlari keltirilgan. Barcha ko‘rsatilgan ma’lumotlarda maktab dasturidan chetga chiqilmagan va ularning deyarli har biri maktab darsligida mavjud (ayrimlari masala ko‘rinishida).

Shuningdek, birinchi qism matematikadan uncha yuqori talab qo‘yilmaydigan OTMlarning kirish imtihonlariga tayyorlanayotgan abituriyentlar uchun geometriyadan qo‘llanma bo‘la oladi.

Ikkinchi qism qiyinligi yuqori bo‘lgan masalalardan iborat. Bular:

a) maktab darsligiga kirmagan, ma’lum darajada namunaviy masalalar va elementar geometrik teoremalar;
b) turli darajadagi matematika fani olimpiadalari uchun chiroyli masalalar;
d) muhim g‘oyaviy mazmunga ega bo‘lgan masalalar;
e) kirish imtihonlarida matematikadan yuqori talab qo‘yiladigan OTM larda (MDU, MFTI, MIFI va hk.) turli yillarda taklif etilgan, ba‘zi mashhur masalalar;
f) matematika fanidan turli xil shakldagi to‘garak mashg‘ulotlarida an’anaviy taklif etiladigan qiziqarli va chiroyli geometrik masalalar.

Ikkinchi qism masalalari geometriya faniga qiziqishi yuqori bo‘lgan, geometrik masalalar yechishni yaxshi ko‘radigan o‘quvchilar uchun tavsiya etilishi mumkin.

Zarurat tug‘ilganda o‘quvchi ko‘plab masalalarning batafsil yechimini quyidagi tanilgan kitoblardan topishlari mumkin:

1. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Часть I. Планиметрия. М.: Учпедгиз, 1936.
2. *Делоне Б., Житомирский О.* Задачник по геометрии. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
3. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: Наука, 1991.
4. *Прасолов В. В, Шарыгин И.Ф.* Задачи по стереометрии. М.: Наука, 1989.
5. *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия. М.: Наука,1986.
6. *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. М.: ГИТТЛ, 1954. (Библиотека математического кружка. Выпуск 2 и 3).

Masalalar tanlashda I.F. Sharigin rahbarligida Moskva Uzluksiz Matematika Ta'lim markazi hamda Moskva shahri 57-sonli maktab xodimlari va o'quvchilari tomonidan yaratilgan "Masalalar" kompyuter ma'lumot-qidiruv tizimidan[1] foydalanilgan.

Berilgan aksariyat masalalarning yechimlari ham tizimda mavjud.

[1] zadachi.mccme.ru (*tarj.*)

I QISM. Maktab geometriyasiga oid asosiy ma'lumotlar

Planimetriya

1. **Uchburchaklarning tenglik alomatlari.**
   1) Agar bir uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagi ikkinchi uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga mos ravishda teng bo'lsa, bunday uchburchaklar teng bo'ladi.
   2) Agar bir uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan ikkita burchagi boshqa uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan ikkita burchagiga mos ravishda teng bo'lsa, bunday uchburchaklar teng bo'ladi.
   3) Agar bir uchburchakning uchta tomoni boshqa uchburchakning uchta tomoniga mos ravishda teng bo'lsa, bunday uchburchaklar teng bo'ladi.
2. **Teng yonli uchburchakning asosiy xossalari va belgilari.**
   1) Teng yonli uchburchakning asosidagi burchaklari teng.
   2) Teng yonli uchburchakning asosiga tushirilgan medianasi uning uchun ham bissektrisa ham balandlik bo'ladi.
   3) Agar uchburchakning ikkita burchagi teng bo'lsa, bunday uchburchak teng yonli bo'ladi.
   4) Agar uchburchakning medianasi uning balandligi ham bo'lsa, bunday uchburchak teng yonli bo'ladi.
   5) Agar uchburchakning bissektrisasi uning balandligi ham bo'lsa, bunday uchburchak teng yonli bo'ladi.
   6) Agar uchburchakning medianasi uning bissektrisasi ham bo'lsa, bunday uchburchak teng yonli bo'ladi.

3. Kesmaning oxirlaridan bir xil uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o'rni bu kesmaga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq bo'ladi va u kesmaning o'rtasidan o'tadi (kesmaning o'rta perpendikulyari).

4. **Parallel to'g'ri chiziqlarning belgilari va xossalari.**
   1) **Parallellik aksiomasi.** Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa bittadan ko'p bo'lmagan parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.
   2) Agar ikki to'g'ri chiziqni uchinchisi kesib o'tganda ichki almashinuvchi burchaklar teng bo'lsa, bu ikki to'g'ri chiziq parallel bo'ladi.
   3) Agar ikki to'g'ri chiziqning har biri boshqa to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, bu ikki to'g'ri chiziq o'zaro parallel bo'ladi.

4) Bitta to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan ikkita to‘g‘ri chiziq o‘zaro paralleldir.
5) Agar ikki parallel to‘g‘ri chiziqni uchinchisi kesib o‘tsa, hosil bo‘ladigan ichki almashinuvchi burchaklar teng bo‘ladi.

5. Uchburchakning burchaklari yig‘indisi haqidagi teorema va uning natijalari.

1) Uchburchakning ichki burchaklari yig‘indisi 180° ga teng.
2) Uchburchakning tashqi burchagi unga qo‘shni bo‘lmagan ikkita ichki burchaklari yig‘indisiga teng.
3) Qavariq n burchakning ichki burchaklari yig‘indisi $180°(n-2)$ ga teng.
4) n burchakning tashqi burchaklari yig‘indisi 360° ga teng.
5) Agar tomonlari o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan ikkita burchakning ikkalasi ham o‘tkir yoki ikkalasi ham o‘tmas bo‘lsa, u holda ular teng bo‘ladi.

6. Agar ABC uchburchakning B va C burchaklarining bissektrisalari M nuqtada kesishsa, u holda

$$\angle BMC = 90° + \frac{\angle A}{2}.$$

7. Qo‘shni burchaklar bissektrisalarining orasidagi burchak 90° ga teng.

8. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqni uchinchisi kesib o‘tganda hosil bo‘ladigan ichki bir tomonli burchaklarning bissektrisalari o‘zaro perpendikulyar bo‘ladi.

9. To‘g‘ri burchakli uchburchaklarning tenglik alomatlari.

1) Ikkita katetiga ko‘ra.
2) Bir kateti va gipotenuzasiga ko‘ra.
3) Gipotenuzasi va o‘tkir burchagiga ko‘ra.
4) Kateti va o‘tkir burchagiga ko‘ra.

10. Burchak tomonlaridan bir xil uzoqlikda yotgan burchak ichki nuqtalarining geometrik o‘rni burchak bissektrisasidir.

11. To‘g‘ri burchakli uchburchakning 30° li burchagi qarshisidagi katet gipotenuzaning yarmiga teng.

12. Agar to‘g‘ri burchakli uchburchakning kateti gipotenuzaning yarmiga teng bo‘lsa, bu katet qarshisidagi burchak 30° ga teng.

13. Uchburchak tengsizligi. Uchburchakning ikki tomoni yig‘indisi uchinchi tomondan katta.

14. Uchburchak tengsizligidan kelib chiqadigan natija. Siniq chiziqning bo‘g‘inlari yig‘indisi birinchi bo‘g‘inining boshi va so‘nggi bo‘g‘inining oxirini tutashtiruvchi kesmadan katta.

15. Uchburchakning katta burchagi qarshisida katta tomon yotadi.

16. Uchburchakning katta tomoni qarshisida katta burchak yotadi.

17. To‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi katetidan katta.

18. Agar bir nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar va og‘malar tushirilsa, u holda

1) Perpendikulyar og‘madan qisqaroq;

2) Katta ogʻmaga katta proyeksiya mos keladi va aksincha.

19. Parallelogramm. Qarama-qarshi tomonlari parallel boʻlgan toʻrtburchakka parallelogramm deyiladi.

Parallelogrammning xossalari va belgilari.

1) Parallelogrammning diagonali uni ikkita teng uchburchakka ajratadi.
2) Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari oʻzaro teng.
3) Parallelogrammning qarama-qarshi burchaklari oʻzaro teng.
4) Parallelogrammning diagonallari bitta nuqtada kesishadi va bu nuqtada teng ikkiga boʻlinadi.
5) Agar toʻrtburchakning qarama-qarshi tomonlari oʻzaro teng boʻlsa, u holda bu toʻrtburchak – parallelogrammdir.
6) Agar toʻrtburchakning ikkita qarama-qarshi tomoni teng va parallel boʻlsa, u holda bu toʻrtburchak – parallelogrammdir.
7) Agar toʻrtburchakning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga boʻlinsa, u holda bu toʻrtburchak – parallelogrammdir.

20. Toʻgʻri toʻrtburchak. Burchaklari toʻgʻri boʻlgan parallelogrammga toʻgʻri toʻrtburchak deyiladi.

Toʻgʻri toʻrtburchakning xossalari va belgilari.

1) Toʻgʻri toʻrtburchakning diagonallari teng.
2) Agar parallelogrammning diagonallari teng boʻlsa, u holda bu parallelogramm – toʻgʻri toʻrtburchakdir.

21. Romb. Barcha tomonlari teng boʻlgan toʻrtburchakka romb deyiladi.

Rombning xossalari va belgilari.

1) Rombning diagonallari o’zaro perpendikulyar.
2) Rombning diagonallari uning burchaklarini teng ikkiga boʻladi.
3) Agar parallelogrammning diagonallari perpendikulyar boʻlsa, u holda bunday parallelogramm – rombdir.
4) Agar parallelogrammning diagonallari uning burchaklarini teng ikkiga boʻlsa, u holda bunday parallelogramm – rombdir.

22. Kvadrat. Kvadrat deb, barcha tomonlari teng boʻlgan toʻgʻri toʻrtburchakka aytiladi.

23. Berilgan toʻgʻri chiziqdan bir xil masofada yotgan nuqtalarning geometrik oʻrni – ikkita parallel toʻgʻri chiziqdir.

24. Fales teoremasi. Agar burchakning bir tomonidan teng kesmalar qoʻyib, bu kesmalar oxirlaridan burchakning ikkinchi tomonini kesib oʻtuvchi parallel toʻgʻri chiziqlar oʻtkazilsa, ikkinchi tomonni ham teng kesmalarga ajratadi.

25. Uchburchakning oʻrta chizigʻi. Uchburchakning ikki tomoni oʻrtalarini tutashtiruvchi kesma uchburchakning oʻrta chizigʻi deyiladi.

Uchburchakning oʻrta chizigʻi haqidagi teorema. Uchburchakning oʻrta chizigʻi uchburchak tomoniga parallel va uning yarmiga teng.

26. To‘rtburchak tomonlari o‘rtalarining xossasi. Istalgan to‘rtburchak tomonlarining o‘rtalari parallelogrammning uchlari bo‘ladi.

27. Uchburchak medianalari haqidagi teorema. Uchburchakning medianalari bitta nuqtada kesishadi va bu nuqtada uchburchak uchidan boshlab hisoblaganda 2: 1 nisbatda bo‘linadi.

28. a) agar uchburchakning medianasi o‘zi tushayotgan tomonning yarmiga teng bo‘lsa, bu uchburchak to‘g‘ri burchakli bo‘ladi.

b) to‘g‘ri burchakli uchburchak to‘g‘ri burchagi uchidan tushirilgan mediana gipotenuzaning yarmiga teng.

29. Trapetsiya. Tarpetsiya deb, faqat ikkita qarama-qarshi tomoni (asoslari) parallel bo‘lgan to‘rtburchakka aytiladi. Trapetsiyaning o‘rta chizig‘i deb, uning parallel bo‘lmagan tomonlari (yon tomonlari) o‘rtalarini tutashtiruvchi kesmaga aytiladi.

Trapetsiyaning o‘rta chizig‘i haqidagi teorema. Trapetsiyaning o‘rta chizig‘i asoslariga parallel va ular yig‘indisining yarmiga teng.

30. Trapetsiya diagonallari o‘rtalarini tutashtiruvchi kesma asoslari ayirmasining yarmiga teng.

31. Yon tomonlari teng bo‘lgan trapetsiyaga teng yonli trapetsiya deyiladi.

Teng yonli trapetsiyaning xossalari va belgilari.

1) Teng yonli trapetsiyaning asosidagi burchaklari teng.
2) Teng yonli trapetsiyaning diagonallari teng.
3) Agar trapetsiyaning asosidagi burchaklari teng bo‘lsa, bunday trapetsiya teng yonli bo‘ladi.
4) Agar trapetsiyaning diagonallari teng bo‘lsa, bunday trapetsiya teng yonli bo‘ladi.
5) Teng yonli trapetsiya yon tomonlarining asosidagi proyeksiyasi asoslar ayirmasining yarmiga, diagonallarining proyeksiyasi esa asoslar yig‘indisining yarmiga teng.

32. Aylana. Tekislikda aylana markazi deb nomlanuvchi berilgan nuqtadan teng uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o‘rniga aylana deyiladi.

Aylananing xossalari.

1) Vatarga perpendikulyar diametr uni teng ikkiga bo‘ladi.
2) Diametr bo‘lmagan vatarning o‘rtasidan o‘tuvchi diametr unga perpendikulyardir.
3) Vatarning o‘rta perpendikulyari aylana markazidan o‘tadi.
4) Teng vatarlar aylana markazidan teng uzoqlikda yotadi.
5) Aylana markazidan teng masofalarda yotgan vatarlar teng.
6) Aylana o‘zining ixtiyoriy diametriga nisbatan simmetrikdir.
7) Parallel vatarlar orasidagi yoylar teng.
8) Ikkita vatardan aylana markaziga yaqinrog‘i katta bo‘ladi.
9) Diametr aylananing eng katta vataridir.

33. Aylananing ajoyib xossasi. AB kesma to‘g‘ri burchak ostida ko‘rinadigan M nuqtalarning geometrik o‘rni A va B nuqtalarni hisobga olmaganda AB diametrli aylanadir.

34. Tekislikda AB kesma o‘tkir burchak ostida ko‘rinadigan M nuqtalarning ($\angle AMB < 90°$) geometrik o‘rni shu AB to‘g‘ri chiziq nuqtalaridan tashqari, diametri AB bo‘lgan doiraning tashqi qismidan iborat bo‘ladi.

35. Tekislikda AB kesma o‘tmas burchak ostida ko‘rinadigan M nuqtalarning ($\angle AMB > 90°$) geometrik o‘rni shu AB kesma nuqtalaridan tashqari, diametri AB bo‘lgan doiraning ichki qismidan iborat bo‘ladi.

36. Uchburchak tomonlari o‘rta perpendikulyarlarining xossasi. Uchburchak tomonlarining o‘rta perpendikulyarlari bitta nuqtada kesishadi va bu nuqta uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi bo‘ladi.

37. Kesishuvchi ikki aylananing markazlar chizig‘i ularning umumiy vatariga perpendikulyar.

38. To‘g‘ri burchakli uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi – gipotenuzaning o‘rtasidir.

39. Uchburchak balandliklari haqidagi teorema. Uchburchakning balandliklari yotgan to‘g‘ri chiziqlar bitta nuqtada kesishadi.

40. Aylanaga urinma. Aylana bilan yagona umumiy nuqtaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziqqa aylanaga urinma deyiladi.

1) Urinma urinish nuqtasiga o‘tkazilgan radiusga perpendikulyar.
2) Agar aylanadagi nuqtadan o‘tuvchi l to‘g‘ri chiziq bu nuqtaga o‘tkazilgan radiusga perpendikulyar bo‘lsa, unda l to‘g‘ri chiziq aylanaga urinma bo‘ladi.
3) Agar M nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq aylanaga A va B nuqtalarda urinsa, unda $MA = MB$ bo‘ladi.
4) Burchakka ichki chizilgan aylananing markazi burcha bissektrisasida yotadi.
5) **Uchburchakning bissektrisalari haqidagi teorema.** Uchburchakning bissektrisalari bitta nuqtada kesishadi va bu nuqta uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi bo‘ladi.

41. Katetlari a, b va gipotenuzasi c bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakka ichki chizilgan aylananing radiusi

$$\frac{(a+b-c)}{2}$$

ga teng.

42. Agar ABC uchburchakka ichki chizilgan aylana AC tomon bilan M nuqtada urinsa, $AM = p - BC$ bo‘ladi. Bu yerda $p -$ uchburchakning yarim perimetri.

43. Aylana ABC uchburchakning BC tomoniga hamda AB va AC tomonlarining davomiga urinadi. Unda A uchdan aylananing AB tomon bilan urinish nuqtasigacha bo‘lgan masofa ABC uchburchakning yarim perimetriga teng.

44. ABC uchburchakka ichki chizilgan aylana uning AB, BC va AC tomonlari bilan mos ravishda K, L va M nuqtalarda urinadi. Agar $\angle BAC = \alpha$ bo‘lsa, unda

$$\angle KLM = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

bo‘ladi.

45. r va R radiusli aylanalar berilgan $(R > r)$. Ularning markazlari orasidagi masofa a ga teng $(a > R + r)$. Unda tashqi va ichki urinmalarning urinish nuqtalari bilan chegaralangan kesmalari uzunligi mos ravishda $\sqrt{a^2 - (R - r)^2}$ va $\sqrt{a^2 - (R + r)^2}$ ga teng.

46. Agar to‘rtburchakka ichki aylana chizish mumkin bo‘lsa, unda to‘rtburchak qarama-qarshi tomonlarining yig‘indisi teng bo‘ladi.

47. Urinuvchi aylanalar. Agar ikki aylana yagona umumiy nuqtaga (urinish nuqtasi) ega bo‘lsa, bu aylanalar urinadi deyiladi.

1) Ikki aylananing urinish nuqtasi ularning markazlar chizig‘ida yotadi.
2) Markazlari O_1 va O_2 bo‘lgan r va R radiusli aylanalar $r + R = O_1O_2$ bo‘lgandagina tashqi urinadi.
3) Markazlari O_1 va O_2 bo‘lgan r va R radiusli $(r < R)$ aylanalar $R - r = O_1O_2$ bo‘lgandagina ichki urinadi.
4) O_1 va O_2 markazli aylanalar K nuqtada tashqi urinadi. Bu aylanalarga A va B nuqtalarda urinuvchi to‘g‘ri chiziq umumiy urinma bilan C nuqtada kesishsin. U holda $\angle AKB = 90°$ va $\angle O_1CO_2 = 90°$ bo‘ladi.

48. Aylana bilan bog‘liq burchaklar.

1) Aylana yoyining burchak o‘lchovi markaziy burchakning burchak o‘lchoviga teng.
2) Ichki chizilgan burchak o‘zi tortib turgan burchakning yarmiga teng.
3) Kesishuvchi vatarlar orasidagi burchak vatarlar kesib o‘tgan qarama-qarshi yoylar yig‘indisining yarmiga teng.
4) Ikki kesishuvchi vatarlar orasidagi burchak kesuvchilar aylanada kesgan yoylar ayirmasining yarmiga teng.
5) Urinma va vatar orasidagi burchak ular orasidagi yoy burchak o‘lchovining yarmiga teng.

49. Bitta yoyni tortib turgan ichki chizilgan burchaklar teng.

50. Berilgan kesma berilgan burchak ostida ko‘rinuvchi nuqtalarning geometrik o‘rni teng aylanalarning ikki yoyi bo‘ladi (bu yoylarning oxirlarisiz)

51. Agar to‘rtburchakka tashqi aylana chizish mumkin bo‘lsa, uning qarama-qarshi burchaklari yig‘indisi 180° ga teng bo‘ladi.

52. Agar to‘rtburchakning qarama-qarshi burchaklari yig‘indisi 180° ga teng bo‘lsa, unda bu to‘rtburchakka tashqi aylana chizish mumkin.

53. Agar trapetsiyaga ichki aylana chizish mumkin bo‘lsa, unda trapetsiyaning yon tomonlari aylana markazidan to‘g‘ri burchak ostida ko‘rinadi.

54. Agar M nuqta AB kesmaga tegishli bo‘lib, $AM:BM = a:b$ bo‘lsa, unda $AM:AB = a:(a+b)$ va $BM:AB = b:(a+b)$ bo‘ladi.

55. Proporsional kesmalar haqidagi teorema. Burchakning tomonlarini kesib o‘tuvchi parallel to‘g‘ri chiziqlar tomonlarni proporsional kesmalarga ajratadi.

56. O‘xshashlik. Uchburchakning o‘xshashlik alomatlari.

1) Agar ikki uchburchakning bittadan burchagi teng hamda uning tashkil etuvchi tomonlari mos ravishda proporsional bo‘lsa, unda bu uchburchaklar o‘xshash bo‘ladi.
2) Agar bir uchburchakning ikki burchagi boshqa uchburchakning ikki burchagiga mos ravishda teng bo‘lsa, bunday uchburchaklar o‘xshash bo‘ladi.
3) Agar bir uchburchakning uchta tomoni boshqa uchburchakning uchta tomoniga mos ravishda proporsional bo‘lsa, bunday uchburchaklar o‘xshash bo‘ladi.

57. O‘xshash shakllarning chiziqli elementlari nisbati o‘xshashlik koeffitsiyentiga teng.

58. Trapetsiyaning ajoyib xossasi. Trapetsiyaning diagonallari kesishish nuqtasi, yon tomonlari davomining kesishish nuqtasi va asoslarining o‘rtalari bitta to‘g‘ri chiziqda yotadi.

59. Uchburchak bissektrisasining xossasi. Uchburchakning bissektrisasi uning tomonini qolgan tomonlarining nisbati kabi nisbatda bo‘ladi.

60. Berilgan uchburchak asosining balandligiga ko‘paytmasi o‘zgarmasdir.

61. Agar BM va CN lar – ABC uchburchakning balandliklari bo‘lsa ($\angle A \neq 90°$), u holda AMN uchburchak ABC uchburchakka o‘xshash bo‘ladi va bunda o‘xshashlik koeffitsiyenti $|\cos \angle A|$ ga teng.

62. E nuqtada kesishuvchi AB va CD vatarlar kesmalarining uzunliklari ko‘paytmasi teng, ya’ni $|AE| \cdot |EB| = |CE| \cdot |ED|$.

63. Urinma va kesuvchi haqidagi teorema va undan kelib chiqadigan natija.

1) Agar bir nuqtadan aylanaga urinma va kesuvchi o‘tkazilsa, unda kesuvchini butun uzunligini uning tashqi qismi uzunligiga ko‘paytmasi urinmaning kvadratiga teng.
2) Kesuvchining butun uzunligini uning tashqi qismi uzunligiga ko‘paytmasi berilgan nuqta va berilgan aylana uchun o‘zgarmasdir.

64. To‘g‘ri burchakli uchburchakdagi trigonometrik munosabatlar.

1) To‘g‘ri burchakli uchburchakning kateti gipotenuza bilan bu katet qarshisidagi burchak sinusi yoki yopishgan burchak kosinusi ko‘paytmasiga teng.
2) To‘g‘ri burchakli uchburchakning kateti ikkinchi katet bilan qarshi burchak tangensi yoki yopishgan burchak kotangensi ko‘paytmasiga teng.

65. Pifagor teoremasi. To‘g‘ri burchakli uchburchak gipotenuzasining kvadrati katetlar kvadratlarining yig‘indisiga teng.

66. Pifagor teoremasiga teskari teorema. Agar uchburchak bir tomonining kvadrati qolgan ikki tomon kvadratlari yig‘indisiga teng bo‘lsa, bunday uchburchak to‘g‘ri burchakli bo‘ladi.

67. To‘g‘ri burchakli uchburchakda o‘rta proporsionallar. Tog‘ri burchakli uchburchak to‘g‘ri burchagi uchidan tushirilgan balandlik katetlarning gipotenuzadagi o‘rta proporsionalidir, har bir katet esa gipotenuza va shu katetning gipotenuzadagi proyeksiyasining o‘rta proporsionalidir.

68. Agar trapetsiyaga ichki aylana chizish mumkin bo‘lsa, u holda aylana radiusi yon tomonni aylanaga urinish nuqtasi ajratgan kesmalarning o‘rta proporsionalidir.

69. Radiuslari r va R bo‘lgan, tashqi urinuvchi aylanalarning umumiy tashqi urinmasining kesmasi umumiy ichki urinmasining tashqi urinmalar ajratgan kesmasiga teng. Bu kesmalarning har biri $2\sqrt{Rr}$ bo‘ladi.

70. Uchburchakdagi metrik munosabatlar.

1) **Kosinuslar teoremasi.** Uchburchak bir tomonining kvadrati qolgan ikki tomon kvadratlari yig‘indisidan bu ikki tomon va ular orasidagi burchak kosinusi ko‘paytmasi ikkilanganining ayirmasiga teng.
2) **Kosinuslar teoremasidan kelib chiqadigan natija.** Parallelogrammning diagonallari kvadratlarining yig‘indisi barcha tomonlari kvadratlarining yig‘indisiga teng.
3) Uchburchak medianasi uchun formula. Agar tomonlari a, b va c bo‘lgan uchburchakning c tomoniga tushirilgan medianasi m bo‘lsa,
$$m = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$$
ga teng.
4) **Sinuslar teoremasi.** Uchburchakning tomonlari qarama-qarshi burchaklarining sinuslariga proporsional.
5) **Sinuslar teoremasining umumlashmasi.** Uchburchak tomonining unga qarama-qarshi burchak sinusiga nisbati bu uchburchakka tashqi chizilgan aylana diametriga teng.

71. Uchburchak yuzining formulalari.

1) Uchburchakning yuzi asos va balandlik ko‘paytmasining yarmiga teng.
2) Uchburchakning yuzi uning ikki tomoni va ular orasidagi burchak sinusi ko‘paytmasining yarmiga teng.
3) Uchburchakning yuzi uning yarim perimaetri va ichki chizilgan aylana radiusi ko‘paytmasiga teng.
4) Uchburchakning yuzi uchala tomonlari ko‘paytmasining tashqi chizilgan aylana radiusi to‘rtlanganiga nisbatiga teng.
5) Geron formulasi.

72. Tomoni a bo‘lgan teng tomonli uchburchakning elementlari. Deylik, h, S, r, R — uchburchakning balandligi, yuzi, ichki va tashqi chizilgan aylana radiusi bo‘lsin. U holda

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

73. Parallelogramm yuzining formulalari.

1) Parallelogrammning yuzi uning asosi va balandligining ko‘paytmasiga teng.
2) Parallelogrammning yuzi uning qo‘shni tomonlari va ular orasidagi burchak sinusi ko‘paytmasiga teng.
3) To‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi uning qo‘shni tomonlari ko‘paytmasiga teng.
4) Rombning yuzi uning diagonallari ko‘paytmasining yarmiga teng.

74. Trapetsiyaning yuzi asoslari yig‘indisining yarmi va balandligi ko‘paytmasiga teng.

75. To‘rtburchakning yuzi uning diagonallari va ular orasidagi burchak sinusi ko‘paytmasining yarmiga teng.

76. O‘xshash shakllar yuzlarining nisbati o‘xshashlik koeffitsiyenti kvadratiga teng.

77. Agar ko‘pburchakka ichki aylana chizish mumkin bo‘lsa, uning yuzi ko‘pburchak yarim perimetri va ichki chizilgan aylana radiusi ko‘paytmasiga teng.

78. Agar M nuqta – ABC uchburchakning BC tomonidan olingan nuqta bo‘lsa, u holda

$$\frac{S(AMB)}{S(AMC)} = \frac{BM}{CM}$$

79. Agar P va Q nuqta – ABC uchburchakning AB va AC tomonlaridan (yoki ularning davomidan) olingan bo‘lsa, u holda

$$\frac{S(APQ)}{S(ABC)} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AQ}{AC}$$

80. Radiusi R bo‘lgan aylananing uzunligi $2\pi R$ ga teng.

81. Radiusi R bo‘lgan doiraning yuzi πR^2 ga teng.

Sirkul va chizg‘ich yordamida yasashga doir masalalar.

1. Uchta tomoniga ko‘ra uchburchak yasang.

2. Berilgan burchakka teng burchak yasang.

3. Ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga ko‘ra uchburchak yasang.

4. Bir tomoni va unga yopishgan burchaklariga ko‘ra uchburchak yasang.

5. Kesmani teng ikkiga bo‘ling.

6. Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziq o‘tkazing.

7. Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazing.

8. Berilgan burchakning bissektrisasini yasang.
9. Berilgan ikki kesmaning yig‘indisini (ayirmasini) yasang.
10. Kesmani teng n bo‘lakka bo‘ling.
11. Berilgan uchburchakka tashqi chizilgan aylanani yasang.
12. a, b va c kesmalar berilgan. $x: a = b: c$ bo‘lgan x kesmani yasang.
13. Ikki katetiga ko‘ra to‘g‘ri burchakli uchburchak yasang.
14. Kateti va gipotenuzasiga ko‘ra to‘g‘ri burchakli uchburchak yasang.
15. a va b kesmalar berilgan. $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$, $\sqrt{ab}$ kesmalarni yasang.
16. Tomonlarining o‘rtalariga ko‘ra uchburchak yasang.
17. Berilgan burchakka tortilgan yoyni yasang.
18. Markazi berilgan va berilgan nuqtadan o‘tuvchi aylana yasang.
19. Radiusi berilgan va berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi aylana yasang.
20. Berilgan nuqtadan berilgan aylanaga urinma o‘tkazing.
21. Asoslari va yon tomonlariga ko‘ra trapetsiya yasang.
22. Asoslari va diagonallariga ko‘ra trapetsiya yasang.
23. Ikki tomoniga va uchinchi tomonga o‘tkazilgan medianasiga ko‘ra uchburchak yasang.
24. Ixtiyoriy burchakning ichidan M nuqta olingan. M nuqta orqali shunday to‘g‘ri chiziq o‘tkazingki, bu to‘g‘ri chiziqning burchak tomonlari ajratgan kesmasi M nuqtada teng ikkiga bo‘linsin.
25. Bir tomoni, uning qarshisidagi burchagi va bu burchak uchidan tushirilgan balandligiga ko‘ra uchburchak yasang.

Stereometriya

1. Stereometriya aksiomalari.

Aksiomalar bilan bevosita bog‘liq faktlar

2. To‘g‘ri chiziq va unda yotmagan nuqta orqali yagona tekislik o‘tadi.
3. Ikkita parallel to‘g‘ri chiziq orqali yagona tekislik o‘tadi.
4. Berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqta orqali bu to‘g‘ri chiziqqa yagona parallel tekislik o‘tadi.

Fazoda parallellik

5. To‘g‘ri chiziq va tekislikning parallellik alomati. Agar a to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotgan biror to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, unda a to‘g‘ri chiziq α tekislikka parallel bo‘ladi.
6. Agar a to‘g‘ri chiziq orqali unga parallel bo‘lgan α tekislikka o‘tkazilgan tekislik uni b to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesib o‘tsa, unda a va b to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘ladi.

7. Agar a va b to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lib, a to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekislik b to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekislikni kesib o‘tsa, bu tekisliklarning kesishish to‘g‘ri chizig‘i a va b to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘ladi.

8. Fazoda to‘g‘ri chiziqlar parallelligining tranzitivligi. Agar a to‘g‘ri chiziq b to‘g‘ri chiziqqa, b to‘g‘ri chiziq esa c to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, unda a to‘g‘ri chiziq c to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi.

9. Tekisliklar parallelligining alomati. Agar bir tekislikdagi kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar boshqa tekislikdagi kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarga mos ravishda parallel bo‘lsa, unda bu tekisliklar parallel bo‘ladi.

10. Agar ikki parallel tekislik uchinchi tekislik bilan kesishsa, unda kesishish to‘g‘ri chiziqlari parallel bo‘ladi.

11. Tekisliklar parallelligining tranzitivligi. Agar α tekislik β tekislikka, β tekislik γ tekislikka parallel bo‘lsa, unda α tekislik γ tekislikka parallel bo‘ladi.

12. Parallel to‘g‘ri chiziqlarning parallel tekisliklar ajratgan kesmalari teng.

13. Berilgan tekislikda yotmagan nuqtadan bu tekislikka yagona parallel tekislik o‘tadi.

14. Parallelepiped yoqlari va diagonallarining xossasi. Parallelepipedning qarama-qarshi yoqlari teng va parallel. Parallelepipedning diagonallari bitta nuqtada kesishadi va bu nuqtada teng ikkiga bo‘linadi.

15. Tetraedr medianalari haqidagi teorema. Tetraedrning medianalari (tetraedrning uchi va uni qarshisidagi yog‘ining medianalari kesishgan nuqtasini tutashtiruvchi kesma) bitta nuqtada kesishadi va bu nuqtada tetraedr uchidan boshlab hisoblaganda 3: 1 nisbatda bo‘linadi.

16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ Parallelepipedning AC_1 diagonali A_1BD uchburchakning medianalari kesishgan nuqtadan o‘tadi va bu nuqtada A uchdan boshlab hisoblaganda 1: 2 nisbatda bo‘linadi.

17. Agar piramida uning asosiga parallel tekislik yordamida kesilsa, kesimda asosga o‘xshash ko‘pburchak hosil bo‘ladi.

Ayqash to‘g‘ri chiziqlar

18. Ayqash to‘g‘ri chiziqlar alomati. Agar a to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotsa, b to‘g‘ri chiziq esa bu tekislikni a to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqta orqali kesib o‘tsa, unda a va b to‘g‘ri chiziqlar ayqash bo‘ladi.

19. Ikkita ayqash to‘g‘ri chiziq orqali yagona parallel tekisliklar jufti o‘tadi.

20. Uchlari ikkita ayqash to‘g‘ri chiziqlarda bo‘lgan kesmalar o‘rtalarining geometrik o‘rni bu to‘g‘ri chiziqlarga parallel va shunday kesmalardan birining o‘rtasidan o‘tuvchi tekislik bo‘ladi.

21. Ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak (ularning biriga parallel va ikkinchisini M nuqtada kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq hamda shu ikkinchi to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak) kattaligi M nuqtaning qanday tanlanishiga bog‘liq emas.

22. Ixtiyoriy ikki ayqash to‘g‘ri chiziq uchun yagona umumiy perpendikulyar mavjud (uchlari bu to‘g‘ri chiziqlarda bo‘lgan kesma har ikki to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘ladi).

Parallel proeksiyalash

23. Proyeksiyalash to‘g‘ri chizig‘i (proyeksiyalovchi) ga parallel bo‘lmagan to‘g‘ri chiziq to‘g‘ri chiziqqa o‘tadi.

24. Proyeksiyalovchiga parallel bo‘lmagan parallel to‘g‘ri chiziqlar jufti parallel to‘g‘ri chiziqlar juftiga yoki bitta to‘g‘ri chiziqqa o‘tadi.

25. Proyeksiyalash natijasida bitta to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotgan kesmalarning nisbati saqlanadi.

26. Og‘ma tekislikni uning bu tekislikdagi parallel proyeksiyasiga tegishli nuqta orqali kesib o‘tadi.

27. Yassi ko‘pburchakning tekislikka ortogonal proyeksiyasining yuzi proyeksiyalanayotgan ko‘pburchak yuziga bu ko‘pburchak tekisligi va proyeksiya tekisligi orasidagi burchak kosinusi ko‘paytmasiga teng.

Fazoda koordinatalar va vektorlar

28. Vektorning koordinatalari bu vektor oxiri va boshining mos koordinatalari ayirmasiga teng.

29. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo‘lishi uchun $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ tenglik bajarilishi zarur va yetarli, bu yerda $k -$ ixtiyoriy son.

30. Uchta vektorning komplanar bo‘lishi uchun ulardan birining qolgan ikkitasi orqali chiziqli ifodalanishi zarur va yetarli ($\vec{a} = x \cdot \vec{b} + y \cdot \vec{c}$, bu yerda $x, y -$ ixtiyoriy sonlar).

31. Ixtiyoriy vektorni uchta nokomplanar vektorlarga yagona usulda yoyish mumkin.

32. Agar M nuqta $- AB$ ning o‘rtasi bo‘lsa, unda

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)}{2}$$

bo‘ladi.

33. Agar M nuqta $- AB$ ning o‘rtasi, $N - CD$ ning o‘rtasi bo‘lsa, unda

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)}{2}$$

bo‘ladi.

34. Agar M nuqta ABC uchburchak medianalari kesishgan nuqta bo‘lsa, unda

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)}{3}$$

bo‘ladi.

35. Agar M nuqta $ABCD$ parallelogrammning diagonallari kesishgan nuqta bo‘lsa, unda

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)}{4}$$

bo‘ladi.

36. Kesma o‘rtasining koordinatalari bu kesma uchlarining mos koordinatalari o‘rta arifmetigiga teng.

37. Vektorlar skalyar ko‘paytmasining xossalari.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

b) $\alpha\, \vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$;

d) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

e) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$;

f) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) + \vec{b}^2$;

g) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$, bu yerda tenglik faqat va faqat $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo‘lgandagina bajariladi;

h) Noldan farqli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar faqat va faqat ularning skalyar ko‘paytmasi nolga teng bo‘lgandagina perpendikulyar bo‘ladi.

38. $A(x_1; y_1; z_1)$ va $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar orasidagi masofa quyidagiga teng

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

39. Agar noldan farqli $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ va $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ vektorlar orasidagi burchak φ bo‘lsa, unda

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

bo‘ladi.

40. Nolga teng bo‘lmagan $\vec{n}(a; b; c)$ (normal) vektorga perpendikulyar va $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi quyidagicha bo‘ladi

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

41. Nolga teng bo‘lmagan $\vec{m}(a; b; c)$ (yo‘naltiruvchi) vektorga parallel va $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning parametrik ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} x - x_0 = at, \\ y - y_0 = bt, \\ z - z_0 = ct. \end{cases}$$

42. Ikki tekislikning kesishishidan hosil bo‘lgan to‘g‘ri chiziq quyidagi sistema ko‘rinishida beriladi:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

bu yerda $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$ va $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$.

43. Agar $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ tekisliklar orasidagi burchak φ bo‘lsa, u holda

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

bo‘ladi.

44. Tekislikning “kesmalardagi” tenglamasi. Agar tekislik koordianata o‘qlarini $A(p;0;0)$, $B(0;q;0)$ va $C(0;0;r)$ $(p;q;r \neq 0)$ nuqtalarda kesib o‘tsa, unda bu tekislik tenglamasini quyidagchi yozish mumkin:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

45. Agar $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikkacha masofa ρ bo‘lsa, u holda

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

bo‘ladi.

To‘g‘ri chiziq va tekislikning perpendikulyarligi.

46. To‘g‘ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik alomati. Agar to‘g‘ri chiziq kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarga perpendikulyar bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq ular yotgan tekislikka ham perpendikulyar bo‘ladi.

47. Agar ikkita to‘g‘ri chiziq bitta tekislikka perpendikulyar bo‘lsa, u holda ular parallel bo‘ladi.

48. Agar ikki parallel to‘g‘ri chiziqlardan bittasi tekislikka perpendikulyar bo‘lsa, u holda ikkinchisi ham bu tekislikka perpendikulyar bo‘ladi.

49. Bitta to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan ikkita tekislik perpendikulyar bo‘ladi.

50. Agar to‘g‘ri chiziq va tekislik bitta to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, u holda ular parallel bo‘ladi.

51. Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar yagona tekislik o‘tadi.

52. Berilgan nuqtadan berilgan tekislikka yagona perpendikulyar to‘g‘ri chiziq o‘tadi.

53. Uch perpendikulyar haqidagi teorema. Tekislikda yotgan to‘g‘ri chiziq bu tekislikka tushirilgan o‘gmaga perpendikulyar bo‘lishi uchun og‘maning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasiga perpendikulyar bo‘lishi zarur va yetarli.

54. Agar bir nuqtadan tekislikka og‘malar va perpendikulyar tushirilgan bo‘lsa, u holda

a) Perpendikulyar og‘madan qisqaroq;
b) Teng og‘malar teng ortogonal proyeksiyalarga ega;
d) Katta og‘ma katta ortogonal proyeksiyaga mos;

e) Ikkita og‘madan ortogonal proyeksiyasi katta og‘ma kattaroq bo‘ladi.

55. Tekislik va to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak haqidagi teorema. Og‘ma va uning ortogonal proyeksiyasi orasidagi burchak, bu og‘ma va tekislikda yotgan ixtiyoriy boshqa to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakdan kichik.

56. Kesma uchlaridan teng uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o‘rni bu kesma o‘rtasidan unga perpendikulyar o‘tuvchi tekislikdan iborat bo‘ladi.

57. Berilgan tekislikdan berilgan uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o‘rni ikkita parallel to‘g‘ri chiziq bo‘ladi.

58. Uchburchakning uchlaridan bir xil uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o‘rni bu uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazidan o‘tib, uchburchak tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi.

59. Agar piramidaning yon yoqlari teng bo‘lsa, uning balandligi asosiga tashqi chizilgan aylana markazidan o‘tadi.

Ikki yoqli burchak

60. Ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi (ikki yoqli burchakning qirrasiga perpendikulyar tekislik bilan kesimi) uning qirrasidagi qaysi nuqtani tanlashga bo‘g‘liq emas.

61. Ikki yoqli burchakning ichki sohasidagi, yoqlaridan teng uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o‘rni ikki yoqli burchakning bissektor tekisligi bo‘ladi.

62. Tekisliklar perpendikulyarligining zaruriylik va yetarlilik sharti. Ikki tekislik o‘zaro perpendikulyar bo‘lishi (to‘g‘ri ikkiyoqli burchak tashkil etishi) uchun faqat va faqat ulardan biri ikkinchisiga o‘tkazilgan perpendikulyar orqali o‘tishi kerak.

63. Agar ikki kesishuvchi tekislikning har biri uchinchi tekislikka perpendikulyar bo‘lsa, unda kesishish to‘g‘ri chizig‘i ham bu tekislikka perpendikulyar bo‘ladi.

64. Agar uchburchakli piramidaning barcha yon qirralari asos tekisligi bilan bir xil ikki yoqli burchak tashkil qilsa, unda piramidaning balandligi asosga ichki chizilgan aylana markazidan yoki tashqi-ichki chizilgan aylanalardan birortasining markazidan o‘tadi.

Ko‘pyoqli burchaklar

65. Uchyoqli burchakning bitta yassi burchagi qolgan ikki yassi burchaklari yig‘indisidan kichik.

66. Qavariq ko‘pyoqli burchakning yassi burchaklari yig‘indisi 360° dan kichik.

67. To‘g‘ri burchakli Parallelepiped diagonallarining xossasi.

a) To‘g‘ri burchakli Parallelepipedning diagonallari teng.

b) To‘g‘ri burchakli Parallelepiped diagonalining kvadrati uning uchta o‘lchami (bitta uchidan chiquvchi uchta qirrasi) kvadratlarining yig‘indisiga teng.

Sfera. Urinma tekislik. Urinuvchi sferalar

68. Sferani kesib o‘tuvchi tekislikning hosil qilgan kesimi aylanadan iborat. Sfera markazidan kesuvchi tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi bu aylananing markazi bo‘ladi.

69. Sferaga urinma tekislik (sfera bilan yagona umumiy nuqtaga ega bo‘lgan tekislik) urinish nuqtasiga o‘tkazilgan radiusga perpendikulyar bo‘ladi.

70. Sferaga urinma to‘g‘ri chiziq (sfera bilan yagona umumiy nuqtaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziq) urinish nuqtasiga o‘tkazilgan radiusga perpendikulyar bo‘ladi.

71. Ikki yoqli burchakka ichki chizilgan sfera markazi bu ikki yoqli burchakning bissektor tekisligida yotadi.

72. Sferaga bitta nuqtadan o‘tkazilgan urinma to‘g‘ri chiziqlarning kesmalari o‘zaro teng.

73. Urinuvchi sferalarning (yagona umumiy nuqtaga ega bo‘lgan sferalar) markazlar to‘g‘ri chizig‘i ularning urinish nuqtasidan o‘tadi.

74. Agar ikkita turli sferalar bittadan ortiq umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, u holda aylana bo‘ylab kesishadi. Bu aylananing tekisligi sferalarning markazlar to‘g‘ri chizig‘iga perpendikulyar.

Muntazam piramida

75. Agar $ABCD -$ uchi D nuqtada bo‘lgan muntazam uchburchakli piramida bo‘lib, $DM -$ balandligi, $a -$ asosining tomoni va $A_1, B_1, C_1 -$ mos ravishda BC, AC va AB tomonlarning o‘rtalari bo‘lsa, u holda

a) $\angle DAM = \angle DBM = \angle DCM -$ yon qirra va asos tekisligi orasidagi burchak;

b) $\angle DA_1M = \angle DB_1M = \angle DC_1M -$ yon yoq va asos tekisligi orasidagi ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi;

c) $\angle AFB$ (bu yerda F nuqta – A uchdan DC qirraning asosiga o‘tkazilgan perpendikulyarning asosi) – piramidaning yon qirralari orasidagi chiziqli burchak;

d) $AA_1 = BB_1 = CC_1 = a\sqrt{3}/2$ – asosdagi uchburchakning balandliklari;

e) $AM = BM = CM = 2AA_1/3 = a/\sqrt{3} = (a\sqrt{3})/3$ – yon qirralarning asos tekisligidagi ortogonal proyeksiyalari;

f) $A_1M = B_1M = C_1M = AA_1/3 = a/2\sqrt{3} = (a\sqrt{3})/6$ – apofemalarning asos tekisligidagi ortogonal proyeksiyalari;

g) $C_1F - AB$ va CD qarama-qarshi qirralarning umumiy perpendikulyari.

76. Muntazam uchburchakli piramidaning qarama-qarshi qirralari o‘zaro perpendikulyar.

77. Qirrasi a bo‘lgan muntazam tetraedrning balandligi $a\sqrt{2/3}$ ga teng.

78. Agar $PABCD$ – uchi P nuqtada bo‘lgan muntazam to‘rtburchakli bo‘lib, PM – balandligi, a – asosining tomoni, A_1, B_1, C_1, D_1 nuqtalar mos ravishda AB, BC, CD va AD tomonlarining o‘rtalari bo‘lsa, u holda

a) $\angle PAM = \angle PBM = \angle PCM = \angle PDM$ – yon qirra va asos tekisligi orasidagi burchak;
b) $\angle PA_1M = \angle PB_1M = \angle PC_1M = \angle PD_1M$ – yon yoq va asos tekisligi orasidagi ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi;
c) $\angle BFD$ (bu yerda F nuqta – B uchidan AP qirraning asosiga o‘tkazilgan perpendikulyarning asosi) – piramidaning qo‘shni yon yoqlari orasidagi chiziqli burchak;
d) $\angle A_1PC_1 = \angle B_1PD_1$ – qarama-qarshi yoqlar orasidagi ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi;
e) $AM = BM = CM = DM = DB/2 = (a\sqrt{2})/2 = a/\sqrt{2}$ – yon qirralarning asos tekisligidagi ortogonal proyeksiyalari;
f) $A_1M = B_1M = C_1M = D_1M = a/2$ – apofemalarning asos tekisligidagi ortogonal proyeksiyalari;
g) FM – asosning BD diagonali va unga ayqash bo‘lgan AP yon qirrasining umumiy perpendikulyari.

79. Muntazam to‘rtburchakli piramidaning yon qirrasi asosning unga ayqash bo‘lgan diagonaliga perpendikulyar.

Ko‘pyoq sirtining yuzi

80. Prizma yon sirtining yuzi uning perpendikulyar kesim perimetri va yon qirrasi ko‘paytmasiga teng.

81. Muntazam piramida yon sirtining yuzi uning asosi yuzini yon yoq va asos tekisligi orasidagi burchak kosinusiga nisbatiga teng.

Ko‘pyoqlarning hajmlari

82. To‘g‘ri burchakli Parallelepipedning hajmi uning uchta o‘lchami ko‘paytmasiga teng.

83. Og‘ma prizmaning hajmi uning perpendikulyar kesim yuzi va yon qirrasi ko‘paytmasiga teng.

84. Prizmaning hajmi uning asos yuzi va balandligi ko‘paytmasiga teng.

85. Uchbuchakli prizmaning hajmi yon yog‘ining yuzi va bu yoqqa qarama-qarshi yon qirrasi ko‘paytmasining yarmiga teng.

86. Piramidaning hajmi uning asos yuziga balandligi ko‘paytmasining uchdan biriga teng.

87. Balandliklari teng va asoslari tengdosh bo‘lgan piramidalar tengdoshdir.

88. Piramidaning asosida yotgan to‘g‘ri chiziq va piramida uchi orqali tekislik o‘tkazilganda, to‘g‘ri chiziq asos yuzini qanday nisbatda bo‘lsa, tekislik ham piramida hajmini shunday nisbatda bo‘ladi.

89. Agar A_1, B_1 va C_1 nuqtalar $ABCD$ uchburchakli piramidaning mos ravishda DA, DB va DC qirralarida yoki ularning davomida yotsa, u holda $A_1B_1C_1D_1$ piramida hajmining $ABCD$ piramida hajmiga nisbati $\frac{DA_1}{DA} \cdot \frac{DB_1}{DB} \cdot \frac{DC_1}{DC}$ nisbatlar ko‘paytmasi kabi bo‘ladi.

90. O‘xshash ko‘pyoqlarning hajmlari nisbati o‘xshashlik koeffitsiyentining kubi kabi bo‘ladi.

91. Tetraedrning asos yuzi va balandligining ko‘paytmasi o‘zgarmasdir.

92. Tetraedrning hajmi V ikkita qarama-qarshi qirralari a va b, ular orasidagi masofa c hamda ular orasidagi burchak φ sinusi ko‘paytmasining oltidan biriga teng, ya’ni

$$V = \frac{1}{6} abc \cdot \sin\varphi\,.$$

93. Tetraedrning hajmi V uning ikkita yog‘ining yuzi P va Q hamda ular orasidagi φ burchak sinusi ko‘paytmasini ularning umumiy qirrasi a ga nisbatining uchdan ikki qismiga teng, ya’ni

$$V = \frac{2}{3}\frac{P \cdot Q \cdot \sin\varphi}{a}\,.$$

94. a) tetraedrning hajmi uning to‘la sirti va ichki chizilgan sfera radiusining uchdan biriga teng.

b) ichki sfera chizish mumkin bo‘lgan ko‘pyoqning hajmi uning to‘la sirti va ichki chizilgan sfera radiusi ko‘paytmasining uchdan biriga teng.

Aylanish jismlarining sirti va hajmi

95. Silindrning hajmi uning asos yuzi va balandligi ko‘paytmasiga teng.

96. Konusning hajmi uning asos yuzi va balandligi ko‘paytmasining uchdan biriga teng.

97. Radiusi R bo‘lgan sharning hajmi $4\pi R^3/3$ ga teng.

98. Radiusi R bo‘lgan sharning h balandlikka ega segmentining hajmi $\pi h^2(R - h/3)$ ga teng.

99. Asosining radiusi r va balandligi h bo‘lgan silindrning yon sirti $2\pi rh$ ga teng.

100. Asosining radiusi r va yasovchisi l bo‘lgan konusning yon sirti πrl ga teng.

101. Radiusi R bo‘lgan sferaning sirti $4\pi R^2$ ga teng.

102. Radiusi R bo‘lgan sharning h balandlikka ega segmentining sferik sirti $2\pi Rh$ ga teng.

II QISM. Elementar geometriyaning tanlangan masalalari va teoremalari

Planimetriya

1. Teng yonli uchburchakning asosidan olingan nuqtadan yon tomonlargacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi o‘zgarmas.
2. Bir uchburchakning uchta medianasi ikkinchi uchburchakning uchta medianasiga mos ravishda teng bo‘lsa, bu uchburchaklar tengdir.
3. ABC uchburchakning A uchidan chiquvchi medianasi AB va AC tomonlar yig‘indisining yarmidan kichik, lekin ular ayirmasining yarmidan katta.
4. Uchburchak uchta medianasining yig‘indisi uchburchak perimetridan kichik, lekin perimetrning to‘rtdan uch qismidan katta.
5. Qavariq to‘rtburchak diagonallarining yig‘indisi ikkita qarama-qarshi tomonlari yig‘indisidan katta.
6. Uchburchakning uchini shu uch qarshisidagi tomondan olingan nuqta bilan tutashtiruvchi kesma, qolgan tomonlarning kattasidan kichik.
7. Uchburchakning ikki tomonidan olingan nuqtalarni tutashtiruvchi kesma uchburchak tomonlarining eng kattasidan katta emas.
8. a) Agar ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ va $\angle BAC > \angle B_1A_1C_1$ bo‘lsa, $BC > B_1C_1$ bo‘ladi.

b) Agar ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ va $BC > B_1C_1$ bo‘lsa, $\angle BAC > \angle B_1A_1C_1$ bo‘ladi.

9. AA_1 kesma – ABC uchburchakning medianasi. A burchak $AA_1 > \frac{1}{2}BC$ bo‘lganda va faqat shu holdagina o‘tkir bo‘ladi.
10. Uchburchak ichidan olingan nuqtadan uchlarigacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi uchburchakning yarim perimetridan katta, lekin perimetridan kichik.
11. Radiuslari r va R (bunda $r < R$) bo‘lgan aylanalar ularning markazlari orasidagi masofa $R - r$ dan katta, lekin $R + r$ dan kichik bo‘lgandagina kesishishadi.
12. To‘rtburchakning qarama-qarshi tomonlari o‘rtalarini tutashtiruvchi kesmalar:

a) to‘rtburchakning diagonallari perpendikular bo‘lganda teng;
b) to‘rtburchakning diagonallari teng bo‘lganda perpendikular bo‘ladi.

13. $ABCDE$ beshburchakda AB, BC, CD va DE tomonlarning o‘rtalari mos ravishda K, L, M va N. P va Q nuqtalar esa mos ravishda KM va LN kesmalarning o‘rtalari. U holda, $PQ \parallel AE$ va $PQ = \frac{1}{4}AE$.

14. Teng tomonli ABC va CDE uchburchaklar (uchburchaklarning uchlari soat mili yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalishda yozilgan) AE to‘g‘ri chiziqdan bir tomonda yotadi va yagona umumiy C nuqtaga ega. Agar M, N va K nuqtalar mos ravishda BD, AC va CE kesmalarning o‘rtalari bo‘lsa, MNK uchburchakning teng tomonli bo‘ladi.

15. Trapetsiyaning yon tomoniga yopishgan burchaklarning bissektrisalari trapetsiyaning o‘rta chizig‘ida kesishishadi.

16. Tomonlari a va b bo‘lgan parallelogramm bissektrisalari kesishishidan hosil bo‘lgan bo‘lgan to‘rtburchak diagonallarining uzunliklari $|a-b|$ bo‘ladi.

17. Trapetsiyaning bir asosidagi burchaklari yig‘indisi $90°$ bo‘lsa, asoslari o‘rtlarining tutashtiruvchi kesma uzunligi asoslar ayirmasining yarmicha.

18. $ABCD$ parallelogramning AB va AD tomonlarida M va N nuqtalar shunday olinganki, MC va NC kesmalar parallelogramni uchta tengdosh bo‘lakka ajratadi. Agar $BD = d$ bo‘lsa, MN ni toping.

19. Diagonallari 3 va 5 bo‘lgan trapetsiya asoslarining o‘rtalarini tutashtiruvchi kesma uzunligi 2. Trapetsiyaning yuzini toping.

20. Trapetsiyaning asoslariga parallel o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziqning trapetsiya ichidagi qismini trapetsiyaning diagonallari uch qismga bo‘lakka bo‘ladi. Bunda bir uchi yon tomonlarda bo‘lgan bo‘laklar o‘zaro teng.

21. Asoslari a va b bo‘lgan trapetsiya diagonallarining kesishish nuqtasidan asoslarga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Bu to‘g‘ri chiziqning trapetsiya ichidagi qismining uzunligi

$$\frac{2ab}{a+b}.$$

22. Asoslari a va b bo‘lgan trapetsiyaning asoslariga parallel qilib o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq trapetsiyani tengdosh qismlarga ajratadi. To‘g‘ri chiziqning trapetsiya ichidagi qismi uzunligi

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

23. M – AB kesmaning o‘rtasi. Agar A_1, M_1 va B_1 nuqtalar mos ravishda A, M va B nuqtalarning bir to‘g‘ri chiziqdagi proyeksiyalari bo‘lsa, M_1 nuqta – A_1B_1 kesmaning o‘rtasi.

24. O‘tkir burchakli ABC uchburchakning BD va CE balandliklari o‘tkazilgan. Agar B va C uchlardan DE to‘g‘ri chiziqqa BF va CG perpendikularlar tushirilsa, $EF = DG$ bo‘ladi.

25. AB kesmada**n** C nuqta olingan. C nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq AC va BC diametrli aylanalarni mos ravishda K va L nuqtalarda, AB diametrli aylanani esa M va N nuqtalarda kesib o‘tadi. U holda, $KM = LN$.

26. Uchburchakning α, β va γ burchaklari orasida $\alpha \le \beta \le \gamma$ munosabat o‘rinli bo‘lsin. U holda, $\alpha \le 60°$, $\gamma \ge 60°$ va $0° < \beta < 90°$.

27. Uchburchakning ikki tomoiga tashqaridan kvadratlar yasalgan. U holda, ikki kvadratning uchburchakning bir uchidan chiquvchi tomonlari oxirlarini tutashtiruvchi kesma uzunligi uchburchakning shu uchidan chiquvchi medianasidan ikki marta uzun.

28. Umumlashgan Pifagor teoremasi. CD kesma – ABC uchburchakning to‘g‘ri burchagi uchidan o‘tkazilgan balandlik bo‘lsin. U holda, ABC, CBD va ACD uchburchaklar o‘xshash bo‘ladi. Agar l, m va n bu uchburchaklarning mos chiziqli elementlari bo‘lsa, $l^2 = m^2 + n^2$.

29. To‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasiga o‘tkazilgan balandlik ajratgan uchburchaklarga ichki chizilgan aylanalarning markazlari orasidagi masofa 1 ga teng. Berilgan uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusini toping.

30. Ikki aylana A va B nuqtalarda kesishadi. Birinchi aylananing AC va BD vatarlarining davomlari ikkinchi aylanani E va F nuqtalarda kesib o‘tadi. U holda, CD va EF to‘g‘ri chiziqlar parallel.

31. Ikki aylananing urinish nuqtasidan kesuvchi o‘tkazilgan. U holda, hosil bo‘lgan vatarlarning oxirlarida aylanaga o‘tkazilgan urinmalar parallel bo‘ladi.

32. Kopernik teoremasi. Qo‘zg‘almas aylana bo‘ylab uning ichki tomonida radiusi shu aylana radiusidan ikki marta kichik bo‘lgan aylana aylanyapti. U holda, kichik aylananing belgilangan K nuqtasi qo‘zg‘almas aylananing diametri bo‘yicha harakatlanadi.

33. O‘tkir burchakli ABC uchburchakning bissektrisalari uchburchakka tashqi chizilgan aylanani A_1, B_1 va C_1 nuqtalarda kesib o‘tadi. U holda, $A_1B_1C_1$ uchburchakning balandliklari AA_1, BB_1 va CC_1 to‘g‘ri chiziqlarda yotadi.

34. O‘tkir burchakli ABC uchburchakning balandliklarining davomlari uchburchakka tashqi chizilgan aylanani A_1, B_1 va C_1 nuqtalarda kesib o‘tadi. U holda, $A_1B_1C_1$ uchburchakning bissektrisalari AA_1, BB_1 va CC_1 to‘g‘ri chiziqlarda yotadi.

35. Agar ushbu shartlardan bittasi bajarilsa ham A, B, C va D nuqtalar bir aylanada yotishini isbotlang:

a) $\angle CAD = \angle CBD = 90°$;

b) A va B nuqtalar CD to‘g‘ri chiziqdan bir tomonda yotib, $\angle CAD = \angle CBD$;

d) AC va BD to‘g‘ri chiziqlar O nuqtada kesishib, $AO \cdot OC = BO \cdot OD$;

36. Katetlari $BC = a$ va $AC = b$ bo‘lgan to‘g‘ri burchakli ABC uchburchakning AB gipotenuzasiga tashqi tomonda $ABKM$ kvadrat yasalgan. U holda, C nuqtadan kvadrat markazigacha bo‘lgan masofa

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

37. To‘g‘ri burchakli ABC uchburchakning AB gipotenuzasiga tashqi tomonda markazi O bo‘lgan kvadrat yasalgan. CO nur to‘g‘ri burchak bissektrisasi ekanligini isbotlang.

38. ABC uchburchakda B burchak 60°, AD va CE bissektrisalar O nuqtada kesishadi. $OD = OE$ ekanligini isbotlang.

39. a) O nuqtadan o‘tuvchi uchta to‘g‘ri chiziq o‘zaro 60° burchak hosil qiladi. U holda, O nuqtadan boshqa istalgan nuqtaning bu to‘g‘ri chiziqlardagi proyeksiyalari teng tomonli uchburchakning uchlari bo‘ladi.

b) Istalgan nuqtaning uchburchak balandliklariga proyeksiyalari dastlabki uchburchakka o‘xshash uchburchakning uchlari bo‘ladi.

40. Teng tomonli ABC uchburchakning C uchidan to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan, K va M nuqtalar – mos ravishda A va B nuqtalarning shu to‘g‘ri chiziqdagi

proyeksiyalari, P – AB tomon o‘rtasi. KMP uchburchakning teng tomonli ekanligini isbotlang.

41. Uchburchak balandliklarining asoslari yon tomonlariga proyeksiyalanganda hosil bo‘lgan oltita nuqtaning bir aylanada yotishini isbotlang.

42. Arximed masalasi. Aylananing AB yoyiga AMB siniq chiziq ichki chizilgan ($AM > MB$). AB yoyning K o‘rtasidan AM kesmaga tushirilgan KH perpendikular siniq chiziqni teng ikkiga bo‘lishini, ya’ni $AH = HM + MB$ ekanligini isbotlang.

43. Teng tomonli ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylananing BC yoyida M nuqta olingan. U holda, $AM = BM + CM$.

44. Torrichelli nuqtasi. ABC uchburchakning tomonlariga tashqi tomondan teng tomonli BCA_1, CAB_1 va ABC_1 uchburchaklar yasalgan hamda AA_1, BB_1 va CC_1 kesmalar o‘tkazilgan. U holda:

a) bu kesmalar teng;
b) bu kesmalar bir nuqtada kesishadi;
d) agar bu kesmalarning kesishish nuqtasi uchburchak ichida bo‘lsa, bu nuqtadan uchburchak uchlarigacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi shu kesmalardan har birining uzunligicha.

45. Ferma masalasi. O‘tkir burchakli uchburchak ichida shunday nuqta topingki, bu nuqtadan uchburchak uchlarigacha masofalar yig‘indisi eng kichik bo‘lsin.

46. Agar ABC uchburchakning A uchi va unga tashqi chizilgan aylananing O markazidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tashqi chizilgan aylanani ikkinchi marta M nuqtada kesib o‘tsa, BOM va COM uchburchaklar teng yonli bo‘ladi.

47. Mansion teoremasi. Uchburchakka ichki va ichki-tashqi chizilgan aylanalarning markazlarini tutashtiruvchi kesmalar uchburchakka tashqi chizilgan aylana bilan kesishish nuqtasidan teng ikkiga bo‘linishini isbotlang.

48. Eyler formulasi. ABC uchburchakka ichki va tashqi chizilgan aylanalarning markazlari O_1 va O_2, radiuslari esa mos ravishda r va R bo‘lsa,

$$O_1O_2 = \sqrt{R^2 - 2Rr}$$

49. To‘rtburchakning tomonlarini diametr qilib o‘tkazilgan aylanalar to‘rtburchakni to‘la qoplaydi.

50. To‘rtburchakning qarama-qarshi ikkita burchagi o‘tmas. Bu burchaklar uchlarini tutashtiruvchi diagonal ikkinchi diagonaldan kichikligini isbotlang.

51. Ikki aylana M nuqtada ichki urinadi. Katta aylananing AB vatari kichik aylanaga T nuqtada urinsin. U holda, MT nur AMB burchakning bissektrisasi ekanligini isbotlang.

52. Uchta juft-jufti bilan kesishuvchi aylanalarning umumiy vatarlari yoki ularning davomlari yo bir nuqtadan o‘tadi, yo parallel, yo bir to‘g‘ri chiziqda yotadi.

53. AB vatarning davomida M nuqta olingan. Agar $MC^2 = MA \cdot MB$ bo‘ladigan aylananing C nuqtasi topilsa, MC – aylanaga o‘tkazilgan urinma.

54. Parallelogramm tomonlariga tashqi tomonda yasalgan kvadratlarning markazlari kvadrat hosil qiladi.

55. Agar uchburchakning bir burchagi 120° bo‘lsa, uning bissektrisalari asoslari hosil qilgan uchburchak to‘g‘ri burchakli bo‘ladi.

56. Agar ABC uchburchakda B burchak 120° bo‘lib, AE, BD va CM bissektrisalar O nuqtada kesishsa, $\angle DMO = 30°$ bo‘ladi.
57. To‘g‘ri chiziqda (aylanada) A va B nuqtalar olingan. Biri shu to‘g‘ri chiziqqa (aylanaga) A nuqtada, ikkinchisi esa B nuqtada urinuvchi aylanalar urinish nuqtalarining geometrik o‘rnini toping.
58. Eyler to‘g‘ri chizig‘i. Istalgan uchburchakda balandliklarning H kesishish nuqtasi (ortomarkaz), tashqi chizilgan aylananing O markazi va medianalarining M kesishish nuqtasi (og‘irlik markazi) bir to‘g‘ri chiziqda yotib, M nuqta O va H nuqtalar orasida hamda $MH = 2MO$ bo‘ladi.
59. Menelay teoremasi. Biror to‘g‘ri chiziq ABC uchburchakning AB va BC tomonlarini hamda AC tomonining davomini mos ravishda C_1, A_1 va B_1 nuqtalarda kesib o‘tsa,

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$$

bo‘ladi.
60. Cheva teoremasi. ABC uchburchakning AB, BC va CA tomonlarida mos ravishda C_1, A_1 va B_1 nuqtalar olingan bo‘lsa, AA_1, BB_1 va CC_1 kesmalar faqat va faqat

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

bo‘lgandagina bir nuqtada kesishadi.
61. a) **Jergon nuqtasi.** Uchburchakka ichki aylana chizilgan. Urinish nuqtalari shu tomon qarshisidagi uchlar bilan tutashtitilgan. U holda, uchala kesma bir nuqtada kesishadi.

b) **Nagel nuqtasi.** Istalgan uchburchak uchlarini ichki-tashqi chizilgan aylanalarning uchburchak tomonlariga urinish nuqtalari bilan tutashtirishdan hosil bo‘lgan kesmalar bir nuqtada kesishadi.
62. ABC uchburchakning AD balandligida olingan M nuqtadan BM va CM to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. Ular AC va AB tomonlarni mos ravishda P va Q nuqtalarda kesib o‘tadi. U holda, AD – PDQ burchakning bissektrisasi.
63. $ABCD$ to‘rtburchak diagonallarining P kesishish nuqtasini AB va CD to‘g‘ri chiziqlarning Q kesishish nuqtasi bilan tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq AD tomonni teng ikkiga bo‘ladi. U holda, u BC tomonni ham teng ikkiga bo‘ladi.
64. ABC uchburchakning BCtomonini diametr qilib o‘tkazilgan aylana AB va AC tomonlarni mos ravishda M va N nuqtalarda kesib o‘tsa,

$$S(AMN) = S(ABC)\cos^2 \alpha$$

bo‘ladi.
65. Trapetsiya diagonallari va asoslari hosil qilgan uchburchaklarning yuzlari S_1 va S_2 bo‘lsa, trapetsiyaning yuzini toping.
66. ABC uchburchakning yuzi S bo‘lsa, uning medianalaridan tuzilgan uchburchakning yuzi $\frac{3}{4}$S bo‘ladi.
67. Uchburchak ichidan olingan nuqtadan uning tomonlariga parallel qilib o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziqlar hosil qilgan uchburchaklarning yuzlari S_1, S_2 va S_3 bo‘lsa, berilgan uchburchakning yuzi

$$\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$$

bo‘ladi.

68. Qavariq to‘rtburchakning har bir tomoni teng uch qismga bo‘lingan va mos bo‘linish nuqtalari tutashtirilgan. U holda, bu kesmalar bir-birini teng uch qismga bo‘ladi.

69. Ikki to‘g‘ri chiziq to‘rtburchakning qarama-qarshi tomonlarini teng uch qismga bo‘lib o‘tadi. U holda, bu to‘g‘ri chiziqlar orasida to‘rtburchak yuzining uchdan bir qismi yotadi.

70. Paskal teoremasi. Aylanaga ichki chizilgan oltiburchak qarama-qarshi tomonlarining davomlari kesishadigan nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotadi.

71. Brianshon teoremasi. Aylanaga tashqi chizilgan oltiburchakning qarama-qarshi uchlarini tutashtiruvchi diagonallari bir nuqtada kesishadi.

72. Agar to‘rtburchakka ichki aylana chizish mumkin bo‘lsa, aylananing to‘rtburchak qarama-qarshi tomonlariga urinuvchi nuqtalarini tutashtiruvchi kesmalar to‘rtburchak diagonallarining kesishish nuqtasidan o‘tadi.

73. A va B nuqtalargacha bo‘lgan masofalari kvadratlarining ayirmasi o‘zgarmas bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni AB to‘g‘ri chiziqqa perpendikular to‘g‘ri chiziq bo‘ladi.

74. AB va CD to‘g‘ri chiziqlar faqat va faqat

$$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$$

bo‘lgandagina perpendikular bo‘ladi.

75. O_1 va O_2 markazli aylanalar berilgan. Bu aylanalarga o‘tkazilgan urinmalar teng bo‘ladigan nuqtalarning geometrik o‘rni O_1O_2 to‘g‘ri chiziqqa perpendikular to‘g‘ri chiziq yoki bu to‘g‘ri chiziqning bir qismi bo‘ladi. Qanday shart bajarilganda bu nuqtalarning geometrik o‘rni shu to‘g‘ri chiziqning o‘zi bo‘ladi?

76. $AC \neq BC$ bo‘lgan ABC uchburchakda C burchakning bissektrisasi faqat va faqat $\angle C = 90°$ bo‘lgandagina shu uchdan o‘tkazilgan mediana va balandlik orasidagi burchakni teng ikkiga bo‘ladi.

77. Uchburchakning bir uchidan chiqarilgan bissektrisa, mediana va balandlik shu burchakni teng to‘rt bo‘lakka bo‘lsa, uchburchakning burchaklarini toping.

78. Istalgan ABC uchburchakda balandliklarning kesishish nuqtasi va uchburchakka tashqi chizilgan aylananing A nuqta bilan diametral qarama-qarshi nuqtasini tutashtiruvchi kesma BC kesmaning o‘rtasida teng ikkiga bo‘linadi.

79. Uchburchak balandliklari kesishish nuqtasining xossalari.

a) ABC uchburchakning balandliklari H nuqtada kesishsin. U holda, ABC, AHB, AHC va BHC uchburchaklarga tashqi chizilgan aylanalarning radiuslari teng.

b) ABC uchburchakning balandliklari H nuqtada kesishib, O nuqta tashqi chizilgan aylananing markazi bo‘lsin. U holda, $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

d) ABC uchburchakning balandliklari H nuqtada kesishsin. U holda, AH va BC kesmalarning o‘rtalarini tutashtiruvchi kesmaning uzunligi ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusiga teng.

e) Uchburchak ortomarkazidan uchburchakning uchigacha bo‘lgan masofa tashqi chizilgan aylananing markazidan shu uch qarshisidagi tomongacha bo‘lgan masofadan ikki marta katta.
f) Uchburchak ortomarkazida uchburchak tomoni yotgan to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘lgan nuqta uchburchakka tashqi chizilgan aylanada yotadi.

80. Radiuslari bir xil bo‘lgan uchta aylana O nuqtada hamda juft-jufti bilan A, B va C nuqtalarda kesishadi. U holda,

a) ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi ham shu uch aylana radiusidek bo‘ladi;
b) bir aylana markazini qolgan ikki aylananing kesishish nuqtasi bilan tutashtiruvchi uch to‘g‘ri chiziq bir nuqtadan o‘tadi;
d) O – ABC uchburchakning ortomarkazi.

81. ABC uchburchakda O – tashqi chizilgan aylana markazi va H – balandliklarning kesishish nuqtasi bo‘lsa, $\angle HAB = \angle OAC$.

82. ABC uchburchakda O – tashqi chizilgan aylananing markazi bo‘lib, BM va CN balandliklar o‘tkazilgan bo‘lsa, $OA \perp MN$.

83. a) O‘tkir burchakli ABC uchburchakda H – balandliklarning kesishish nuqtasi va $CH = AB$. C burchakni toping.

b) O‘tkir burchakli ABC uchburchakda H – balandliklarining kesishish nuqtasi va R – tashqi chizilgan aylananing markazi bo‘lib, $CH = R$ bo‘lsa, C burchakni toping.

84. Uchburchak balandligi asosining uchburchak tomonlariga proyeksiyalarini tutashtiruvchi kesmaning uzunligi balandlikning tanlanishiga bog‘liq emasligini isbotlang.

85. Aylananing M nuqtasidan uning AB va CD diametrlari yotgan to‘g‘ri chiziqlarga mos ravishda MP va MQ perpendikularlar o‘tkazilgan. PQ kesmaning uzunligi M nuqtaning tanlanishiga bog‘liq emasligini isbotlang.

86. O‘tkir burchakli ABC uchburchakda CH balandlikning H asosidan BC va AC tomonlarga mos ravishda HM va HN perpendikularlar o‘tkazilgan. MNC va ABC uchburchaklarning o‘xshashligini isbotlang.

87. O‘tkir burchakli ABC uchburchakda AM va CN balandliklarning davomlari unga tashqi chizilgan aylanani mos ravishda P va Q nuqtalarda kesib o‘tadi. Agar $AC = a$ va $PQ = \frac{6}{5}a$ bo‘lsa, tashqi chizilgan aylananing radiusini toping.

88. ABC uchburchakda BH balandlikning H asosiga AB va BC tomonlarga nisbatan simmetrik bo‘lgan K va P nuqtalar belgilangan. KP kesmaning uchburchakning AB va BC tomonlari yoki ularning davomlari bilan kesishish nuqtalari ABC uchburchak balandliklarining asoslari ekanligi isbotlang.

89. Ortouchburchakning (uchlari uchburchak balandliklarining asoslarida bo‘lgan uchburchak) xossalari.

a) O‘tkir burchakli uchburchakning balandliklari ortouchburchak burchaklarining bissektrisalari bo‘ladi.
b) ABC uchburchakning BC, AC va AB tomonlarida mos ravishda A_1, B_1 va C_1 nuqtalar $\angle BA_1C_1 = \angle CA_1B_1$, $\angle CB_1A_1 = \angle AB_1C_1$ va $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1$

bo‘ladigan qilib olingan bo‘lsa, $A_1B_1C_1$ – ABC uchburchakning ortouchburchagi.

d) Uchburchakka ichki chizilgan aylananing uchburchak tomonlari bilan urinish nuqtalari tutashtirilib, bu uchburchakning balandliklari o‘tkazilgan. Bu balandliklarning asoslarini tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziqlar uchburchak tomonlariga parallel ekanligini isbotlang.

e) **Fanyano masalasi.** Uchlari berilgan uchburchak tomonlarida bo‘lgan eng kichik perimetrli uchburchak shu uchburchakning ortouchburchagidir.

90. O‘tkir burchakli uchburchak balandliklarining asoslarini tutashtiruvchi kesmalarning uzunliklari 8, 15 va 17. Uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusini toping.

91. To‘qqiz nuqta aylanasi. Istalgan uchburchak tomonlarining o‘rtalari, balandliklarining asoslari va uchlaridan ortomarkazigacha bo‘lgan kesmalarning o‘rtalari bir aylanada yotadi.

92. Aylana ABC uchburchakning BC tomoniga M nuqtada, AB va AC tomonlarining davomlariga mos ravishda N va P nuqtalarda urinadi. Shu uchburchakka ichki chizilgan aylana BC va AB tomonlarga mos ravishda K va L nuqtalarda urinadi. U holda,

a) AN kesma ABC uchburchakning yarimperimetricha;

b) AL kesma ABC uchburchak yarimperimetri va BC tomon ayirmasicha;

d) $BK = CM$;

e) $NL = BC$.

93. ABC uchburchakning BC, CA va AB tomonlarida mos ravishda A_1, B_1 va C_1 nuqtalar mos ravishda $AC_1 = AB_1$, $BA_1 = BC_1$ va $CA_1 = CB_1$ bo‘ladigan qilib olingan. U holda, A_1, B_1 va C_1 nuqtalar uchburchakka ichki chizilgan aylananing uchburchak tomonlariga urinish nuqtalari.

94. Radiuslari 1, 2 va 3 bo‘lgan aylanalar juft-jufti bilan tashqi ravishda urinadi. U holda, urinish nuqtalaridan o‘tuvchi aylananing radiusi 1 ga teng.

95. Uchburchakning yarim perimetri p va yuzi S bo‘lsin.

a) Uchburchakning a tomoniga urinuvchi ichki-tashqi chizilgan aylananing radiusi

$$r_1 = \frac{S}{p-a}$$

b) Ichki-tashqi chizilgan aylanalarning radiuslari r_1, r_2 va r_3, ichki chizilgan aylananing radiusi r bo‘lsa,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \text{ va } S = \sqrt{rr_1r_2r_3}\,.$$

96. ABC uchburchakka ichki chizilgan aylana BC tomonga M nuqtada urinsa, ABM va ACM uchburchaklarga ichki chizilgan aylanalar AM kesmaga bir nuqtada urinadi.

97. Qarama-qarshi tomonlarining yig‘indisi teng bo‘lgan to‘rtburchakka ichki aylana chizish mummkin.

98. AD – ABC uchburchakning bissektrisasi bo‘lsin. U holda,

a) $AD = \frac{2AB\cdot AC\cdot\cos\left(\frac{\angle BAC}{2}\right)}{AB+AC}$;

b) $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$.

99. Shteyner-Lemus teoremasi. Uchburchakning ikki bissektrisasi teng bo‘lsa, u teng yonlidir.

100. Diagonallari perpendikular bo‘lgan aylanaga ichki chizilgan to‘rtburchakning xossalari. $ABCD$ to‘rtburchak O markazli va R radiusli aylanaga ichki chizilgan. Uning AC va BD diagonallari P nuqtada to‘g‘ri burchak ostida kesishadi. U holda,

a) ABP uchburchakning medianasi CD kesmaga perpendikular;
b) AOC siniq chiziq $ABCD$ to‘rtburchakni tengdosh shakllarga ajratadi;
d) $AB^2 + CD^2 = 4R^2$;
e) $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 4R^2$ va $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 8R^2$;
f) aylana markazidan to‘rtburchak tomonigacha bo‘lgan masofa qarama-qarshi tomondan ikki marta kichik;
g) B va C uchlardan AD tomonga o‘tkazilgan perpendikularlar AC va BD diagonallarni mos ravishda E va F nuqtalarda kesib o‘tsa, $BCFE$ – romb;
h) uchlari P nuqtaning to‘rtburchak tomonlariga proyeksiyalari bo‘lgan to‘rtburchakka ham ichki, ham tashqi aylana chizish mumkin;
i) aylanaga to‘rtburchak uchlarida o‘tkazilgan urinmalar hosil qilgan to‘rtburchakka tashqi aylana chizish mumkin.

101. Yuzi S bo‘lgan to‘rtburchakning ketma-ket tomonlari a, b, c va d bo‘lsa, $S \leq \frac{ac+bd}{2}$ bo‘lib, tenglik holi diagonallari perpendikular bo‘lib, aylanaga ichki chizilgan to‘rtburchakda bajariladi.

102. Braxmagupta formulasi. Aylanaga ichki chizilgan to‘rtburchakning tomonlari a, b, c va d hamda yuzi S bo‘lsa,

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

bunda $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.

103. Tomonlari a, b, c va d bo‘lgan to‘rtburchakka ham tashqi, ham ichki aylana chizilsh mumkin bo‘lsa, uning yuzi $\sqrt{abcd}$ bo‘ladi.

104. Ikki aylana A va B nuqtalarda kesishadi. Bu aylanalarda AC va AD vatarlar ikkinchi aylanaga urinadigan qilib o‘tkazilgan. U holda, $AB = \sqrt{CB \cdot DB}$.

105. Aylana va to‘g‘ri chiziq M nuqtada urinadi. Aylananing A va B nuqtalaridan bu to‘g‘ri chiziqqa uzunliklari a va b bo‘lgan perpendikularlar o‘tkazilgan. U holda, M nuqtadan AB to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa $\sqrt{ab}$.

106. Aylanadan tashqaridagi M nuqtadan unga ikki urinma o‘tkazilgan. Agar aylananing C nuqtasidan urinmalargacha masofalar a va b bo‘lsa, C nuqtadan urinish nuqtalari orqali o‘tgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa $\sqrt{ab}$.

107. $ABCDE$ beshburchak aylanaga ichki chizilgan. A nuqtadan BC, DC va DE to‘g‘ri chiziqlargacha bo‘lgan masofalar mos ravishda a, b va c bo‘lsa, A nuqtadan BE to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa $\frac{ac}{b}$.

108. Simson to‘g‘ri chizig‘i. Uchburchakka tashqi chizilgan aylanada olingan nuqtadan uning tomonlariga (yoki tomonlarining davomlariga) o‘tkazilgan perpendikularlar bir to‘g‘ri chiziqda yotishini isbotlang.

109. Aylanalarning kesishish nuqtalaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq aylanalarning umumiy urinmasini teng ikkiga bo‘lib o‘tishini isbotlang.
110. Radiuslari R va r bo‘lgan aylanalar A va B nuqtalarda kesishib, to‘g‘ri chiziqqa C va D nuqtalarda urinadi; N nuqta – AB va CD to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi (B nuqta A va N nuqtalar orasida). U holda, a) ACD uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusini; b) NAC va NAD uchburchaklarning N uchlaridan o‘tkazilgan balandliklari nisbatini toping.
111. Qavariq $ABCD$ to‘rtburchakning AC va BD diagonallari o‘tkazilgan. Agar $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90°$ hamda ABD va ACD uchburchaklarga ichki chizilgan aylanalarning markazlari orasidagi masofa $\sqrt{2}$ bo‘lsa, BC ni toping.
112. Styuart teoremasi. ABC uchburchakning BC tomonida D nuqta olingan. U holda, $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD$.
113. $ABCD$ kvadratning ichida P nuqtani $\angle PAB = \angle PBA = 15°$ bo‘ladigan qilib olingan. U holda, DPC – teng tomonli uchburchak.
114. Aylanaga ichki chizilgan $ABCD$ to‘rtburchakda $CD = AD + BC$ tenglik bajarilsa, A va B burchaklarning bissektrisalari CD tomonda kesishadi.
115. ABC uchburchakka ichki chizilgan aylana uning AB va AC tomonlariga mos ravishda M va N nuqtalarda urinadi. MN to‘g‘ri chiziq va B burchak bissektrisasi P nuqtada kesishsa, $\angle BPC = 90°$ bo‘lishini isbotlang.
116. A nuqtadan aylanaga AP va AQ urinmalar (P va Q – urinish nuqtalari) hamda AKL kesuvchi (K nuqta A va L nuqtalar orasida) o‘tkazilgan. Agar KL kesmaning o‘rtasi M bo‘lsa, $\angle AMP = \angle AMQ$ bo‘lishini isbotlang.
117. O markazli aylana KL vatarining davomida A nuqta olinib, AP va AQ urinmalar o‘tkazilgan. Agar PQ kesmaning o‘rtasi M bo‘lsa, $\angle MKO = \angle MLO$ bo‘lishini isbotlang.
118. Aylanaga ichki chizilgan $ABCD$ to‘rtburchakda AB va CD qarama-qarshi tomonlarning davomlari M nuqtada, AD va BC tomonlarning davomlari esa N nuqtada kesishadi. U holda,

a) AMD va DNC burchaklarning bissektrisalari o‘zaro perpendikular;
b) shu bissektrisalar yotgan to‘g‘ri chiziqlar to‘rtburchak tomonlarini kesib o‘tgan nuqtalar rombning uchlari;
d) bissektrisalarning Q kesishish nuqtasi $ABCD$ to‘rtburchak diagonallarining o‘rtalarini tutashtiruvchi kesmaga tegishli bo‘ladi.

119. Aylanaga ichki chizilgan to‘rtburchak qarama-qarshi tomonlarining davomlari P va Q nuqtalarda kesishadi. Aylanaga P va Q nuqtalardan o‘tkazilgan urinmalarning uzunliklari a va b bo‘lsa, PQ ni toping.
120. Teng tomonli ABC uchburchakning BC tomonida olingan O nuqta markazi bo‘lgan aylana uchburchakning AB va AC tomonlariga mos ravishda P va Q nuqtalarda urinadi. Aylanaga o‘tkazilgan urinma bu tomonlarni M va N nuqtalarda kesib o‘tadi. Agar OM va ON kesmalar PQ kesma bilan E va F nuqtalarda kesishsa, $EF = \frac{MN}{2}$ bo‘ladi.
121. Kapalak haqidagi masala. Aylanada AB vatarning C o‘rtasidan KL va MN vatarlar o‘tkazilgan (K va M nuqtalar AB vatardan bir tomonda). KN va LM

kesmalar AB vatarni mos ravishda P va Q nuqtalarda kesib o‘tadi. $PC = QC$ ekanligini isbotlang.

122. Istalgan uchburchakka tashqi chizilgan aylananing radiusi ichki chizilgan aylananing radiusining ikki baravaridan kichik emas. Tenglik sharti faqat va faqat teng tomonli uchburchak uchun bajariladi.

123. Apolloniy aylanasi. Berilgan ikki nuqtagacha bo‘lgan masofalar nisbati $m:n$, bunda $m \neq n$, bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni aylana bo‘ladi.

124. Ptolemey teoremasi. Aylanaga ichki chizilgan to‘rtburchak qarama-qarshi tomonlari ko‘paytmasining yig‘indisi diagonallarining ko‘paytmasiga teng.

125. AC kesmada B nuqta olinib, AC kesmadan bir tomonda diametrlari AB, BC va AC bo‘lgan S_1, S_2 va S_3 yarimaylanalar o‘tkazilgan. S_3 aylanada AC kesmaga proyeksiyasi B nuqta bilan mos bo‘lgan D nuqta olingan. S_1 va S_2 yarimaylanalarning E va F nuqtalari orqali ularning umumiy urinmasi o‘tadi.

a) EF to‘g‘ri chiziq S_3 yarimaylanaga D nuqtadan o‘tkazilgan urinmaga parallel ekanligini isbotlang.
b) $BFDE$ ning to‘g‘ri to‘rtburchak ekanligini isbotlang.
d) Har uchala yarimaylanaga urinuvchi aylananing markazi AC to‘g‘ri chiziqdan a masofada bo‘lsa, shu radiusni toping.
e) **Arximed arbelosi haqidagi masala.** S_1 va S_3 yarimaylanalar hamda BD kesmaga urinuvchi aylananing radiusi S_2 va S_3 yarimaylanalar hamda BD kesmaga urinuvchi aylana radiusicha ekanligini isbotlang.

126. Nyuton teoremasi. Aylanaga tashqi chizilgan to‘rtburchak diagonallarining o‘rtalari va shu aylananing markazi bir to‘g‘ri chiziqda yotadi.

127. ABC uchburchakda medianalarning M kesishish nuqtasi va istalgan O nuqta uchun

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

128. Monj teoremasi. Aylanaga ichki chizilgan to‘rtburchak tomonlarining o‘rtalaridan qarama-qarshi tomonga perpendikular qilib o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziqlar bir nuqtada kesishadi.

129. a) α burchak ostida kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarga nisbatan simmetriyalar kompozitsiyasi to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasiga nisbatan 2α burchakka burish ekanligini isbotlang.

b) Yig‘indisi 360° ga karrali bo‘lmagan ikki burchakka burish kompozitsiyasi burishdir. Uning markazi va burish burchagini aniqlang. Burish burchaklarining yig‘indisi 360° ga karrali bo‘lgan holni tadqiq qiling.

130. Napoleon uchburchagi. Istalgan uchburchak tomonlariga tashqaridan (ichkaridan) yasalgan teng tomonli uchburchaklarning markazlari teng tomonli uchburchakning uchlari bo‘ladi.

131. Ikki urinuvchi aylana urinish nuqtasiga nisbatan gomotetik bo‘ladi.

132. Shal teoremasi. Tekislikda istalgan harakat yo parallel ko‘chirish, yo burish, yo o‘qqa nisbatan simmetriya yoki sirg‘aluvchi simmetriya (o‘qqa nisbatan simmetriya va simmetriya o‘qiga parallel yo‘nalishda parallel ko‘chirishning simmetriyasi) bo‘ladi.

133. Gauss teoremasi. Agar ABC uchburchak AB, AC va BC tomonlarining davomlari l to‘g‘ri chiziqni mos ravishda C_1, B_1 va A_1 nuqtalarda kesib o‘tsa, AA_1, BB_1 va CC_1 kesmalarning o‘rtalari bir to‘g‘ri chiziqda yotadi.

Yasashga doir masalalar

1. Uchta medianasiga ko‘ra uchburchak yasang.
2. Berilgan ikki aylanaga umumiy urinma o‘tkazing.
3. Uchlari berilgan uchta parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotuvchi teng tomonli uchburchak yasang.
4. A va B burchaklari hamda P perimetriga ko‘ra uchburchak yasang.
5. ABC uchburchakning AB va BC tomonlarida mos ravishda X va Y nuqtalarni shunday yasangki, $AX = BY$ va $XY \parallel AC$ bo‘lsin.
6. Bir tomoni, shu tomon qarshisidagi burchagi va qolgan ikki tomoni yig‘indisiga ko‘ra uchburchak yasang.
7. Burchakka berilgan nuqtadan o‘tuvchi ichki aylana o‘tkazing.
8. Berilgan kesmaga parallel va teng bo‘lgan shunday kesma yasangki, uning oxirlari berilgan ikki aylanada yotsin.
9. l to‘g‘ri chiziqdan turli tomonlarda A va B nuqtalar olingan. Bu to‘g‘ri chiziqda shunday M nuqtani topingki, l to‘g‘ri chiziq AMB burchakni teng ikkiga bo‘lsin.
10. l to‘g‘ri chiziqdan bir tomonda M va N nuqtalar olingan. Bu to‘g‘ri chiziqda shunday K nuqtani topingki, quyidagi shartlar bajarilsin:
a) $MK + NK$ yig‘indi eng kichik;
b) MK va L to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak NK va l to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakdan ikki marta kichik bo‘lsin.
11. Qirg‘oqlari parallel bo‘lgan daryoning ikki qirg‘og‘idagi A va B qishloqlar orasidagi masofa eng kichik bo‘lishi uchun qirg‘oqlarga perpendikular ko‘prikni qaryoning qayerida qurish kerak?
12. Ikki parallel to‘g‘ri chiziq berilgan. Faqat chizg‘ich yordamida:
a) ulardan biridagi kesmani teng ikkiga bo‘ling;
b) berilgan M nuqtadan ularga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazing.
13. Ikki parallel to‘g‘ri chiziq, ulardan birining kesmasi va shu kesmaning o‘rtasi berilgan. Faqat chizg‘ich yordamida berilgan M nuqta orqali bu to‘g‘ri chiziqlarga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazing.
14. Faqat chizg‘ich yordamida berilgan aylananing berilgan diametriga perpendikular o‘tkazing.
15. Faqat chizg‘ich yordamida berilgan to‘g‘ri chiziqqa berilgan aylananing markazidan perpendikular o‘tkazing.
16. Berilgan uchburchakka boshqa berilgan uchburchakka teng uchburchakni tashqi chizing, ya’ni, berilgan uchburchakning uchlari orqali shunday to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazingki, ular hosil qilgan uchburchak boshqa berilgan uchburchakka teng bo‘lsin.

17. Berilgan uchburchakka boshqa berilgan uchburchakka teng uchburchakni ichki chizing, ya'ni, berilgan uchburchakning tomonlarida shunday nuqtalarni tanlangki, ular boshqa berilgan uchburchakka teng uchburchakning uchlari bo'lsin.
18. Berilgan nuqta orqali shunday to'g'ri chiziq o'tkazingki, u berilgan uchburchakdan
a) berilgan perimetrli;
b) eng kichik perimetrli;
c) eng kichik yuzali uchburchak ajratsin.
19. Tomonlarining o'rtalariga ko'ra $(2n-1)$ burchak yasang.
20. Tashqi chizilgan aylanani bir uchdan chiqarilgan bissektrisasi, medianasi va balandliklarining davomlari kesib o'tgan nuqtalarga ko'ra uchburchak yasang.
21. Tashqi chizilgan aylananing markaziga tomonlariga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqtalarga ko'ra uchburchak yasang.
22. Balandliklarining asoslariga ko'ra uchburchak yasang.
23. Ikki kesishuvchi aylana berilgan. Ularning kesishish nuqtasidan shunday to'g'ri chiziq o'tkazingki, uning aylanalar orasidagi qismi:
a) shu nuqtada teng ikkiga bo'linsin;
b) berilgan kesmaga teng bo'lsin.
24. Ikki aylana berilgan. Berilgan nuqta orqali shunday to'g'ri chiziq o'tkazingki:
a) uning aylanalar orasidagi bo'lagi shu nuqtada teng ikkiga bo'linsin;
b) u aylanalarda teng vatarlar hosil qilsin.
25. Ikki aylana berilgan. Berilgan to'g'ri chiziqqa parallel shunday to'g'ri chiziq o'tkazingki, bu to'g'ri chiziq:
a) aylanalardan teng vatarlar kesib o'tsin;
b) aylanalarda kesib o'tgan vatarlar yig'indisi berilgan kesmaga teng bo'lsin.
26. Aylanada A va B nuqtalar belgilangan, C – shu aylananing biror nuqtasi. ABC uchburchak a) bissektrisalari; b) balandliklari kesishish nuqtalarining geometrik o'rnini aniqlang.
27. Berilgan a va b kesmalarga ko'ra $\sqrt[4]{a^4+b^4}$ kesmani yasang.
28. Berilgan aylanaga va berilgan to'g'ri chiziqqa to'g'ri chiziqning berilgan nuqtasida urinuvchi aylanani yasang.
29. Berilgan to'g'ri chiziqqa va berilgan aylanaga aylananing berilgan nuqtasida urinuvchi aylanani yasang.
30. Berilgan ikki nuqtadan o'tib, berilgan to'g'ri chiziqqa urinuvchi aylanani yasang.
31. Berilgan ikki nuqtadan o'tib, berilgan aylanaga urinuvchi aylanani yasang.
32. Berilgan nuqtadan o'tib, berilgan to'g'ri chiziqqa va berilgan aylanaga urinuvchi aylana yasang.
33. Uchta balandligiga ko'ra uchburchak yasang.
34. Tashqi va ichki chizilgan aylanalarning markazlari hamda ichki-tashqi chizilgan aylanalardan birining markaziga ko'ra uchburchak yasang.
35. Berilgan burchakning ichida yotib, burchak tomonlarigacha bo'lgan masofalar berilgan kattalikka teng nuqtalarning geometrik o'rnini yasang.
36. Tomonlarida bittadan olingan to'rtta nuqtaga ko'ra kvadrat yasang.

37. Faqat sirkul yordamida a) kesmani teng ikkiga bo‘ling; b) berilgan aylananing markazini toping.
38. **Apolloniy masalasi.** Berilgan uchta aylanaga urinuvchi aylana yasang.

Stereometriya

1. Agar kesishuvchi ikki tekislikning har biri biror to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, bu tekisliklarning kesishish chizig‘i ham shu to‘g‘ri chiziqqa parallel ekanligini isbotlang.
2. $SABCD$ piramidaning asosi – $ABCD$ parallelogramm. SC qirrada olingan M nuqta uchun ABM tekislik o‘tkazilsa, kesimda qanday shakl hosil bo‘ladi?
3. Parallelepipedning tekislik bilan kesimida muntazam beshburchak hosil bo‘lishi mumkinmi?
4. Tetraedr qarama-qarshi qirralarining o‘rtalarini tutashtiruvchi kesmalar bir nuqtada kesishishini isbotlang.
5. Fazoning berilgan nuqtasidan berilgan ikki ayqash to‘g‘ri chiziqlarni kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq o‘tkazing.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedning AC_1 diagonalida M, B_1C to‘g‘ri chiziqda N nuqta shunday tanlanganki, $MN \parallel BD$. Shu kesmalarning nisbatini toping.
7. $SABCD$ piramidaning asosi biror $ABCD$ to‘rtburchak. ABS va CDS tekisliklarning kesishish chizig‘ini yasang.
8. Qavariq to‘rt yoqli burchakni tekislik bilan kesimda parallelogramm hosil bo‘ladigan qilib kesish mumkinligini isbotlang.
9. Biror uch yoqli burchak berilgan. uning qirralaridan biri va shu qirra qarshisidagi yoqning bissektrisasi orqali o‘tuvchi uch tekislik bir to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishishini tekshiring.
10. Bir tekislikda yotmaydigan A, B, C va D nuqtalar olingan bo‘lsin. ABC, ABD va BCD uchburchaklarning medianalari kesishish nuqtalari orqali o‘tkazilgan tekislik BD kesmani qanday nisbatda bo‘ladi?
11. $ABCD$ tetraedr AD qirrasining o‘rtasi M. AB va AC qirralarning B va C uchlari tomonga davomlarida mos ravishda N va K nuqtalar $BN = AB$ va $CK = 2AC$ bo‘ladigan qilib olingan. Tetraedrning MNK tekislik bilan kesimini yasang. Bu tekislik DB va DC qirralarni qanday nisbatda bo‘ladi?
12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedda AC va BA_1 to‘g‘ri chiziqlarda mos ravishda K va M nuqtalar $KM \parallel DB_1$ bo‘ladigan qilib olingan. $KM : DB_1$ ni toping.
13. $ABCD$ tetraedr berilgan. AD, BC va DC qirralarda mos ravishda M, N va K nuqtalar $AM : MD = 1 : 3$, $BN : NC = 1 : 1$ va $CK : KD = 1 : 2$ bo‘ladigan qilib olingan. Tetraedrning MNK tekislik bilan kesimini yasang. Bu tekislik AB qirrani qanday nisbatda bo‘ladi?
14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedda AB, BC va DD_1 qirralarning o‘rtalari mos ravishda M, N va K. Parallelepipedning MNK tekislik bilan kesimini yasang. Bu tekislik CC_1 qirra va DB_1 diagonalni qanday nisbatda bo‘ladi?

15. Asosi $ABCD$ trapetsiya bo‘lgan $SABCD$ piramida berilgan. Trapetsiyada AD va BC asoslarining nisbati 2. D nuqta hamda SA va SB qirralarning o‘rtalari orqali o‘tuvchi tekislikni yasang. Bu tekislik SC qirrani qanday nisbatda bo‘ladi?

16. Asosi $ABCD$ parallelogramm bo‘lgan $SABCD$ piramida berilgan. AS, BS va CS qirralarda mos ravishda M, N va K nuqtalar $AM:MS = 1:2$, $BN:NS = 1:3$ va $CK:KS = 1:1$ bo‘ladigan qilib olingan. Piramidaning MNK tekislik bilan kesimini yasang. Bu tekislik SD qirrani qanday nisbatda bo‘ladi?

17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepiped berilgan. AB, CC_1 va A_1D_1 qirralarda mos ravishda M, N va K nuqtalar olingan. Parallelepipedning MNK tekislik bilan kesimini yasang.

18. Tekislikda bir nuqtadan chiquvchi uchta nur berilgan. ular tekislikni ajratgan bo‘laklarda bittadan nuqta olingan. Sirkul va chizg‘ich yordamida uchlari shu nurlarda yotib, tomonlari shu uch nuqtadan o‘tuvchi uchburchak yasang.

19. $SABCD$ piramidaning asosi $ABCD$ parallelogramm. AB qirraning o‘rtasidan AC va SD qirralarga parallel tekislik o‘tkazilgan. Bu tekislik SB qirrani qanday nisbatda bo‘ladi?

20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedda AD va CC_1 qirralarning mos ravishda M va N o‘rtalaridan DB_1 diagonalga parallel tekislik o‘tkazilgan. Parallelepipedning shu tekislik bilan kesimini yasang. Bu tekislik BB_1 qirrani qanday nisbatda bo‘ladi?

21. $ABCD$ tetraedrning AB, AC, DC va DB qirralarini mos ravishda M, N, P va Q nuqtalarda kesib o‘tuvchi tekislik o‘tkazilgan. Agar $AM:MB = m$, $AN:NC = n$ va $DP:PC = p$ bo‘lsa, $DQ:QB$ ni toping.

22. $ABCA_1B_1C_1$ da ABC va $A_1B_1C_1$ asoslarning medianalari kesishish nuqtalari mos ravishda O va O_1. OO_1 kesmaning o‘rtasidan CA_1 to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Agar $CA_1 = a$ bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqning prizma ichidagi qismi uzunligini toping.

23. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubda a) AA_1 va BD_1; b) BD_1 va DC_1; d) AD_1 va DC_1 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

24. Fazodagi l to‘g‘ri chiziqda ketma-ket A, B va C nuqtalar $AB = 10$ va $BC = 22$ bo‘ladigan qilib olingan. Agar A, B va C nuqtalardan m to‘g‘ri chiziqqacha masofalar mos ravishda 12, 13 va 20 bo‘lsa, l va m to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

25. Fazoning istalgan to‘rtta A, B, C va D nuqtalari uchun

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

ekanligini isbotlang.

26. Leybnits formulasi. ABC uchburchak medianalarining kesishish nuqtasi M va fazoning istalgan O nuqtasi tanlangan bo‘lsin. U holda,

$$OM^2 = \frac{1}{3}(OA^2 + OB^2 + OC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$$

ekanligini isbotlang.

27. Piramidaning asosi gipotenuzasi c va bir burchagi 30° bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchak. Piramidaning yon qirralari asos tekisligiga 45° burchak ostida og‘gan. Piramidaning hajmini toping.

28. Uchi S nuqtada bo‘lgan uch yoqli burchakka O markazli sfera ichki chizilgan. Sferaning burchak yoqlariga urinuvchi nuqtalari orqali o‘tuvchi tekislik SO to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lib o‘tishini isbotlang.

29. Qirrasi a bo‘lgan kub qirralarining bitta tekislikka proyeksiyalari kvadratlarining yig‘indisi tekislikning tanlanishiga bog‘liq emasligini va $8a^2$ ga tengligini isbotlang.
30. Qirrasi a bo‘lgan tetraedr qirralarining bitta tekislikka proyeksiyalari kvadratlarining yig‘indisi tekislikning tanlanishiga bog‘liq emasligini va $4a^2$ ga tengligini isbotlang.
31. Uchburchakli piramidaning har bir yog‘i asos tekisligi bilan 60° burchak hosil qiladi. agar piramida asosining tomonlari 10, 10 va 12 bo‘lsa, uning hajmini toping.
32. Piramidaning asosi tomonlari 6 va 8 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak. Uzunligi 6 bo‘lgan yon qirralardan biri asos tekisligiga perpendikular. Shu yon qirra va asosning u bilan ayqash diagonali orasidagi masofani hamda piramidaning yon sirtini toping.
33. Qirrasi a bo‘lgan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub berilgan. Ushbu: a) AA_1 va BD_1; b) BD_1 va DC_1; d) A_1D va D_1C to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani toping. Har bir holda to‘g‘ri chiziqlarning umumiy perpendikularini yasang.
34. To‘g‘ri burchakli $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedda BD_1 to‘g‘ri chiziq orqali AC to‘g‘ri chiziqqa parallel tekislik o‘tkazilgan. Agar $AB = a, BC = b$ va $CC_1 = c$ bo‘lsa, shu tekilsik va parallelepipedning asos tekisligi orasidagi burchakni toping.
35. $SABCD$ piramidaning asosi teng yonli $ABCD$ trapetsiya bo‘lib, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. SAB va SCD tekisliklar asos tekisligiga perpendikular. Agar SAD yoqning S uchidan o‘tkazilgan balandligi $2a$ bo‘lsa, piramidaning balandligini toping.
36. Radiusi 11 bo‘lgan sferada A, A_1, B, B_1, C va C_1 nuqtalar olingan. AA_1, BB_1 va CC_1 to‘g‘ri chiziqlar M nuqtada kesishib, juft-jufti bilan o‘zaro perpendikular. Agar $BB_1 = 18$, M nuqta sfera markazidan $\sqrt{59}$ masofada va CC_1 kesmani $(8+\sqrt{2}):(8-\sqrt{2})$ nisbatda bo‘lsa, AA_1 ni toping.
37. Qirrasi a bo‘lgan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubda E – AD qirraning o‘rtasi. $MNPQ$ tetraedrning M va N uchlari ED_1 to‘g‘ri chiziqda, P va Q uchlari esa A_1 nuqtadan o‘tib, BC to‘g‘ri chiziqni R nuqtada kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqda yotadi. 1) $BR:BC$ ni; 2) MN va PQ kesmalarning o‘rtalari orasidagi masofani toping.
38. Prizmaning asosi tomoni $\sqrt{3}$ bo‘lgan teng tomonli ABC uchburchak. Uning AD, BE va CF yon qirralari asos tekisligiga perpendikular. Radiusi $\frac{7}{2}$ bo‘lgan ABC tekislikka va AE, BF, CD kesmalarning A, B, C uchlari tomonga davomlariga urinadi. Prizmaning yon qirralarini toping.
39. To‘g‘ri burchakli uchburchakniong katetlari ikki yoqli burchakning yoqlarida yotib, uning qirralari bilan α va β burchak tashkil qiladi. Ikki yoqli burchakni toping.
40. Tekis to‘rtburchakning ikki o‘zaro perpendikular tekisliklarga to‘g‘ri burchakli proyeksiyalari tomoni 2 ga teng bo‘lgan kvadratlar. Agar to‘rtburchakning bir tomoni $\sqrt{5}$ bo‘lsa, uning perimetrini toping.
41. Uchburchakli piramidaning uchidagi hamma tekis burchaklari to‘g‘ri burchaklar. Piramidaning uchi, medianalarining kesishish nuqtasi va unga tashqi chizilgan sharning markazi bir to‘g‘ri chiziqda yotishini isbotlang.

42. $ABCD$ tetraedrda $AD \perp BC$. Piramidaning B va C uchlaridan o‘tkazilgan balandliklari AD va BC to‘g‘ri chiziqlarning umumiy perpendikularida kesishishini isbotlang.
43. $ABCD$ tetraedrda $AB \perp CD$ va $BC \perp AD$ bo‘lsa, $AC \perp BD$ bo‘lishini isbotlang.
44. Tetraedrning qarama-qarshi qirralari juft-jufti bilan perpendikular bo‘lsa, $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ ekanligini isbotlang. Teskarisi ham o‘rinlimi?
45. $ABCD$ uchburchakli piramidaning D uchidan o‘tkazilgan balandligi ABC uchburchakning balandliklari kesishgan nuqtadan o‘tadi. Agar $DB = b$, $DC = c$ va $\angle BDC = 90°$ bo‘lsa, ADB va ADC yoqlar yuzlarining nisbatini toping.
46. $ABCD$ tetraedrning B va C uchlaridan o‘tkazilgan balandliklari kesishadi. $AD \perp BC$ ekanligini isbotlang.
47. Balandliklari yoki balandliklarining davomlari bir nuqtada kesishadigan tetraedr ortosentrik tetraedr deyiladi. $ABCD$ tetraedr faqat va faqat $AB \perp CD$ va $AD \perp BC$ bo‘lganda ort-sentrik boishini isbotlang (bunda qirralarning uchinchi juftligi ham perpendikular bo‘ladi).
48. Tetraedrning qarama-qarshi qirralari o‘zaro perpendikular. Har juft qarama-qarshi qirralarning umumiy perpendikularlari bir nuqtada kesishishini isbotlang.
49. Ortosentrik tetraedrda juft-juft qarama-qarshi qirralarning umumiy o‘rta perpendikularlari bir nuqtada kesishishini isbotlang.
50. Ortosentrik tetraedrning Eyler to‘g‘ri chizig‘i. Ortosentrik tetraedrda medianalarning, balandliklarning kesishish nuqtalari va tashqi chizilgan sferaning markazi bir to‘g‘ri chiziqda yotishini isbotlang.
51. Uchburchakli muntazam piramida asosining tomoni a va yon qirrasi asos tekisligi bilan 45° burchak hosil qiladi. Bu piramida uchun:

a) hajmni;
b) yon yoq va asos tekisligi orasidagi burchakni;
d) ayqash qirralari orasidagi masofani;
e) yon yoqlari orasidagi burchakni;
f) tashqi chizilgan shar radiusini;
g) ichki chizilgan shar radiusini;
h) apofemaning qo‘shni yon yoq bilan hosil qilgan burchakni toping.

52. To‘rtburchakli muntazam piramida asosining tomoni a va yon qirra asos tekisligi bilan 60° burchak hosil qiladi. Bu piramida uchun:

a) hajmni;
b) yon yoq va asos tekisligi orasidagi burchakni;
d) asosning diagonali va u bilan ayqash yon qirra orasidagi masofani;
e) qarama-qarshi yon yoqlar orasidagi burchakni;
f) qo‘shni yon yoqlar orasidagi burchakni;
g) ichki chizilgan shar radiusini;
h) tashqi chizilgan shar radiusini;
i) apofema va qo‘shni yon yoq orasidagi burchakni toping.

53. Oltiburchakli muntazam piramida asosining tomoni va yon qirrasi a. Bu piramida uchun:

a) yon qirra va asos tekisligi orasidagi burchakni;

b) yon yoq va asos tekisligi orasidagi burchjakni;
d) uchidagi tekis burchakni;
e) qo‘shni yon yoqlar orasidagi burchakni;
f) ichki chizilgan shar radiusini;
g) tashqi chizilgan shar radiusini toping.

54. Birlik $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub berilgan. ACB_1D_1 va A_1C_1BD piramidalarning umumiy qismi yuzini toping.

55. To‘rtburchakli muntazam piramidaning yon qirrasi b, uchidagi tekis burchagi α. Piramidaga tashqi chizilgan sfera radiusini toping.

56. Qirrasi a bo‘lgan muntazam tetraedrning hamma qirralariga urinib o‘tuvchi shar radiusini toping.

57. Fazoning nuqtasidan bir-biri bilan teng burchaklar tashkil qiluvchi to‘rtta nur chiqarilgan. Bu burchaklarni toping.

58. n burchakli muntazam piramidaning asosidagi ikki yoqli burchak α. Qo‘shni yon yoqlar orasidagi ikki yoqli burchakni toping.

59. Muntazam $SABCD$ piramida $ABCD$ asosining tomoni a va yon qirrasi $2a$. Oxirlari AD va SC qirralarda bo‘lib, SAB tekislikka parallel bo‘lgan kesmalarni qaraymiz.

a) Bu kesmalarning biri AD qirraning $AM: AD = 3: 4$ bo‘lgan M nuqtasidan o‘tkazilgan. Uning uzunligini toping.
b) Qaralayotgan kesmalardan uzunligi eng kichik bo‘lganining uzunligini toping.

60. To‘rtburchakli $SABCD$ muntazam piramidada SA yon qirra va $ABCD$ asos tekisligi orasidagi burchak SA qirra va SBC tekislik orasidagi burchakka teng. Shu burchakni toping.

61. Parallelepipedning hamma yon yoqlari tomoni a va o‘tkir burchagi 60° bo‘lgan romblardan iborat. Uning hajmini toping.

62. Muntazam tetraedr va uning balandligining o‘rtasiga nisbatan simmetrigining umumiy qismidan iborat jismni qaraymiz. Agar tetraedrning qirrasi a bo‘lsa, bu jismning hajmini toping.

63. Muntazam tetraedr qarama-qarshi qirralarining M va N o‘rtalari belgilangan. Tetraedrning MN to‘g‘ri chiziqqa parallel tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi bir burchagi 60° va yuzi S bo‘lgan to‘rtburchakdan iborat. Tetraedrning to‘la sirtini toping.

64. Kubning qarama-qarshi ikki uchi silindr asoslarining markazlari bilan ustma-ust tushadi, qolgan uchlari esa silindr yon sirtida yotadi. Silindrning balandligini va asosining radiusini toping.

65. O‘zaro ayqash a va b to‘g‘ri chiziqlar hamda a to‘g‘ri chiziqqa A nuqtasida perpendikular bo‘lgan tekislik berilgan. a va b to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa A nuqtadan b to‘g‘ri chiziqning α tekislikdagi b' proyeksiyasigacha bo‘lgan masofaga tengligini isbotlang. b va b' to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak a va b to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni 90° gacha to‘ldirishini isbotlang.

66. Birilik $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubda M – BB_1 qirraning o‘rtasi. AB_1 va CM to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak va masofani toping. Ularning umumiy perpendikulari CM kesmani qanday nisbatda bo‘ladi?

67. Qirrasi 1 bo‘lgan muntazam $ABCD$ tetraedrda AB va BC qirralarning mos ravishda M va N o‘rtalari belgilangan. CM va DN to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak va masofani toping. Ularning umumiy perpendikulari DN kesmani qanday nisbatda bo‘ladi?

68. Birilik $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubning AC_1 diagonaliga parallel l to‘g‘ri chiziq BD, A_1D_1 va CB_1 to‘g‘ri chiziqlardan baravar uzoqlikda. Shu masofani toping.

69. Piramidaga tashqi sharni faqat va faqat uning asosiga tashqi aylana chizish mumkin bo‘lgandagina chizish mumkinligini isbotlang.

70. Qirrasi a bo‘lgan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubda AB va CD qirralarning mos ravishda M va K o‘rtalari belgilangan. M, K, A_1 va C_1 nuqtalarda o‘tuvchi sfera radisuini toping.

71. Agar piramidaga ichki shar chizish mumkin bo‘lsa, piramida hajmi shar radiusi va piramida to‘la sirti ko‘paytmasining $\frac{1}{3}$ qismicha ekanligini isbotlang.

72. Uchburchakli piramidaning ikki yog‘i tomoni a bo‘lgan teng tomonli uchburchak, qolgan yoqlari esa teng yonli to‘g‘ri burchakli uchburchaklar. Piramidaga ichki chizilgan shar radiuisini toping.

73. Radiusi r bo‘lgan shar uchburchakli piramidaning yon yoqlariga asosining tomonlarining o‘rtalarida urinadi. Piramidaning uchini shar markazi bilan tutashtiruvchi kesma sharning asosini kesib o‘tgan nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi. Piramidaning hajmini toping.

74. Uchburchakli $SABC$ piramidaning SC yon qirrasi AB qirrasiga teng va ABC asos tekisligiga $60°$ burchak ostida og‘gan. A, B, C uchlar va piramida yon qirralarining o‘rtalari radiusi 1 bo‘lgan sferada yotadi. Bu sfera markazi AB qirrada yotishini isbotlang va piramidaning balandligini toping.

75. Uchburchakli $PABC$ piramidaning PB yon qirrasi ABC asos tekisligiga perpendikular bo‘lib, $PB = 6, AB = BC = \sqrt{15}$ va $AC = 2\sqrt{3}$. O markazi ABP yoqda yotgan sfera piramidaning qolgan barcha yoqlariga urinadi. O nuqtadan AC qirragacha bo‘lgan masofani toping.

76. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub berilgan. Sfera AC, B_1C, AB_1 to‘g‘ri chiziqlarga va BB_1 to‘g‘ri chiziqqa uning B uchi tomonga davomida urinadi. Kubning qirrasi 1 va sferaning AC to‘g‘ri chiziqqa urinish nuqtasi kubning qirrasiga tegishli bo‘lsa, sferaning radiusini toping.

77. To‘rtburchakli $SABCD$ muntazam piramida markazi $ABCD$ asos tekisligida yotgan sferaga ichki chizilgan. Asosning AC va BD diagonallari H nuqtada kesishadi va SH – piramidaning balandligi. Agar $CH = 4$, $AS = 3{,}75$, $AD = 3$ va $AB = BS$ bo‘lsa, CS va CD ni toping.

78. Sfera uchburchakli $SABC$ piramidaning AS, BS, BC va AC qirralariga mos ravishda K, L, M va N nuqtalarda urinadi. Agar $MN = 7$, $NK = 5$, $LN = 2\sqrt{29}$ va $KL = LM$ bo‘lsa, KL ni toping.

79. Radiusi $\frac{3}{8}$ bo‘lgan sfera to‘rtburchakli $SABCD$ muntazam piramidaga ichki chizilgan. Piramidaning asosi $\angle BAD = 60°$ bo‘lgan $ABCD$ romb. Piramidaning balandligi romb diagonallarining K kesishish nuqtasidan iborat. Asosning AB va AD tomonlarini M va N nuqtalarda kesib o‘tib, sferaga M va N nuqtalardan baravar uzoqlikda yotuvchi nuqtada urinuvchi hamda SK kesmani uning K uchi tomonga

davomidagi biror E nuqtada kesib o‘tuvchi tekislik yagona ekanligini isbotlang. Agar $MN = \frac{4\sqrt{3}}{5}$ bo‘lsa, SE ni toping.

80. To‘rtburchakli $SABCD$ piramidaning asosi $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchak. Agar $AS = 7, BS = 2, CS = 6$ va $\angle SAD = \angle SBD = \angle SCD$ bo‘lsa, DS ni toping.

81. Birlik kubning pastgi asosidagi uchidan, kubga ichki chizilgan sharga urinuvchi tekislik o’tkazilgan. Tekislik yuqori asosdan yuzasi S ga teng bo’lgan uchburchak ajratadi. Tekislikning kub bilan kesishmasi yuzini toping.)

82. Uchburchakli piramidaning yon qirralari juft-jufti bilan perpendikular bo‘lib, uzunliklari a, b va c. Unga tashqi chizilgan shar hajmini toping.

83. Hajmi V bo‘lgan tetraedrning qarama-qarshi qirralari a va b, ular orasidagi burchak α va masofa c bo‘lsa, $V = \frac{1}{6}abc \sin \alpha$ ekanligini isbotlang.

84. Uchburchakli $ABCD$ piramidada $CD = a$, AB qirraning o‘rtasidan CD ga tushirilgan perpendikular uzunligi b bo‘lib, ACD va BCD yoqlar bilan α burchak tashkil qilsa, piramidaning hajmini toping.

85. Markazlari O_1 va O_2 nuqtalarda hamda radiuslari mos ravishda 3 va 1 bo‘lgan sferalar bir-biriga urinadi. O_2 nuqtadan 3 birlik uzoqlikdagi M nuqtadan sferalarning har ikkalasiga urinuvchi to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan bo‘lib, urinish nuqtalari M nuqtadan bir tomonda yotadi. Agar urinmalardan biri O_1O_2 to‘g‘ri chiziq bilan 45° tashkil qilsa, urinmalar orasidagi burchakni toping.

86. Uchburchakli piramidaning qarama-qarshi qirralari juft-jufti bilan teng. Tashqi va ichki chizilgan sferalarning markazlari ustma-ust tushishini isbotlang.

87. Tetraedrning hamma qirralari faqat va faqat quyidagi ikki shartdan biri bajarilganda teng bo‘lishini isbotlang:

a) qarama-qarshi qirralarning o‘rtalarini tutashtiruvchi kesmalar juft-jufti bilan perpendikular;

b) hamma yoqlarning yuzlari teng;

d) medianalari kesishish nuqtasi va tashqi chizilgan sferaning markazi ustma-ust tushadi.

88. Uchburchakli $ABCD$ piramidaning ayqash AC va BD hamda AD va BC qirralari perpendikular. Agar piramidaning barcha qirralari r radiusli sharga urinib, $AB = CD$ bo‘lsa, ABC yoq yuzini toping.

89. Markazi O nuqtada bo‘lgan sfera uchburchakli $ABCD$ piramidaning A, B va C uchlaridan o‘tib, AD, BD va CD to‘g‘ri chiziqlarni mos ravishda K, L va M nuqtalarda kesib o‘tadi. Bunda $AD = 10$, $BC : BD = 3 : 2$ va $AB : CD = 4\sqrt{3} : 11$ ekanligi ma’lum. O nuqtaning ABD, BCD va ACD tekisliklardagi proyeksiyalari mos ravishda AB, BC va AC qirralarning o‘rtalari. AB va CD qirralarning o‘rtalari orasidagi masofa 13. KLM uchburchakning perimetrini toping.

90. Muntazam tetraedrning qirrasi a. Tetraedrning qirrasidan kesimda uchburchak hosil qiluvchi tekislik o‘tkazilgan. Kesimning P perimetri $2a < P \leq 3a$ munosabatni qanoatlantirishini isbotlang.

91. Uchburchakli $SABC$ piramidada B va C uchlarning har biridagi uchta tekis burchaklarning yig‘indisi 180° hamda $SA = CB$. Agar SBC yoqning yuzi 100 va tashqi chizilgan sferaning markazidan ABC asos tekisligigacha bo‘lgan masofa 3 bo‘lsa, piramidaning hajmini toping.

92. Qirrasi 4 bo‘lgan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub berilgan. BC qirraning o‘rtasi M, A_1D_1 qirrada A_1 uchdan 1 birlik masofada N nuqta olingan. Kub sirti bo‘ylab M va N nuqtalar orasidagi masofani toping.
93. $ABCD$ tetraedrni AD, BD va CD qirralar bo‘ylab kesilsa, uning ABC tekislikka yoyilmasi tomoni a bo‘lgan kvadrat bo‘ladi. Tetraedrning hajmini toping.
94. $ABCS$ tetraedrning asosi tomoni $4\sqrt{2}$ bo‘lgan teng tomonli ABC uchburchak. SC yon qirra asos tekisligiga perpendikular va uzunligi 2. S uch va BC qirraning o‘rtasi orqali hamda C uch va AB qirraning o‘rtasi orqali o‘tuvchi ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak va masofani toping.
95. $SABCD$ piramidaning asosi $ABCD$ parallelogramm. AD to‘g‘ri chiziq va SC qirraning o‘rtasi orqali o‘tuvchi tekislik piramida hajmini qanday nisbatda bo‘ladi?
96. Uchburchakli $ABCD$ piramidaning DC qirrasida N nuqta $CN = 2DN$ bo‘ladigan qilib olingan. CA qirraning A uchi tomonga davomida va CB qirraning B uchi tomonga davomida mos ravishda K va M nuqtalar $AC = 2AK$ va $BM = 2BC$ bo‘ladigan qilib olingan. MNK tekislik $ABCD$ piramida hajmini qanday nisbatda bo‘ladi?
97. $SABCD$ piramidaning asosi $ABCD$ parallelogramm. AS qirraning N o‘rtasi, BSC uchburchak SP medianasining K o‘rtasi va SB qirrada $SM = 5MB$ bo‘ladigan M nuqta olingan. MNK tekislik $ABCD$ piramida hajmini qanday nisbatda bo‘ladi?
98. Uchburchakli $ABCD$ piramidaning BC va DC qirralarida mos ravishda N va K nuqtalar $CN = 2BN$ va $DK{:}KC = 3{:}2$ bo‘ladigan qilib olingan hamda ABD uchburchak medianalarining M kesishish nuqtasi belgilangan. MNK tekislik $ABCD$ piramida hajmini qanday nisbatda bo‘ladi?
99. $SABCD$ piramidaning asosi $ABCD$ parallelogramm. AB va SC qirralarda mos ravishda K va M nuqtalar $AK{:}KB = CM{:}MS = 1{:}2$ bo‘ladigan qilib olingan. K va M nuqtalardan BD to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lib o‘tadigan tekislik piramida hajmini qanday nisbatda bo‘ladi?
100. Asosi parallelogramm bo‘lgan to‘rtburchakli piramidaning yon yoqlaridan hajmi shu piramida hajmidan ikki marta kichik bo‘lgan uchburchakli piramida qurish mumkinligini isbotlang.
101. Tetraedr qirrasidagi ikki yoqli burchakning bissektor tekisligi qarshisidagi qirrani shu burchak hosil qilgan yoqlar yuzlariga proporsional bo‘laklarga ajratishini isbotlang.
102. Uchburchakli piramida qarama-qarshi qirralarining o‘rtalaridan o‘tuvchi tekislik piramida hajmini teng ikkiga bo‘lib o‘tishini isbotlang.
103. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedda AA_1 va CC_1 qirralarning mos ravishda M va N o‘rtalari belgilangan. A_1C, B_1M va BN to‘g‘ri chiziqlar juft-juft perpendikular. Agar $A_1C = a$, $B_1M = b$ va $BN = c$ bo‘lsa, parallelepiped hajmini toping.
104. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedda AB, AA_1 va AD qirralarning mos ravishda B, A va D uchlari tomonga davomlarida $BP = \frac{3}{2}AB$, $A_1Q = \frac{3}{2}AA_1$ va $DR = \frac{3}{2}AD$ bo‘ladigan kesmalar qo‘yilgan. PQR tekislik parallelepiped hajmini qanday nisbatda bo‘lib o‘tadi?
105. Kubning diagonaliga perpendikular va uni: 1) 2:1; 2) 3:1 nisbatda bo‘lib o‘tadigan tekislik kub hajmini qanday nisbatda bo‘lib o‘tadi?

106. $ABCD$ tetraedrning AB va CD qirralariga parallel qilib o‘tkazilgan tekisliklar BC qirrani teng uch qismga bo‘ladi. Tekisliklar orasida piramida hajmining qanday qismi joylashgan?

107. Tetraedr ayqash qirralarining nisbati k. Bu qirralarga parallel qilib o‘tkazilgan tekislik kesimda romb hosil qildi. Bu tekislik tetraedr hajmini qanday nisbatda bo‘ladi?

108. Uchta shar juft-juft tashqi urinib, bir tekislikka to‘g‘ri burchakli uchburchakning uchlarida urinishadi. Agar to‘g‘ri burchakli uchburchakning o‘tkir burchaklaridan biri 30° va bu burchak qarshisidagi katet 1 bo‘lsa, sharlarning radiuslarini toping.

109. r radiusli sfera uchburchakli piramidaning barcha qirralariga urinadi va markazi piramida balandligida yotadi. Agar sferaning markazi piramidaning uchlaridan $r\sqrt{3}$ masofada yotsa, piramidaning muntazam ekanligini isbotlang.

110. Tekis burchaklari α dan bo‘lgan uch yoqli burchakning hamma qirralariga urinadigan sfera berilgan. Uch yoqli burchakning yoqlari sferadan radiuslari R bo‘lgan aylanalar kesadi. Sferaning radiusini toping.

111. Faqat va faqat hamma yoqlari tengdosh bo‘lgan parallelepipedgagina ichki sfera chizish mumkinligini isbotlang.

112. Asoslarining radiuslari R dan va balandliklarining $\frac{3}{4}$ qismiga teng bo‘lgan uchta konus α tekislikdan bir tomonda joylashgan va asoslari shu tekislikda yotadi. Konuslar asoslarining aylanalari juft-juft urinadi. Konuslar orasida yotib, uchala konusning yon sirtlariga va α tekislikka urinuvchi sfera radiusini toping.

113. Muntazam $SABC$ piramidada ABC asosining tomoni a, yon qirrasi $2a$. S, B va C nuqtalar uchi A nuqtada bo‘lgan konusning yon sirtida yotadi. Konus o‘q kesimining uchidagi burchakni toping.

114. Muntazam $SABCD$ piramidaning hamma uchlari o‘qi SAB tekislikka perpendikular bo‘lgan silindrning yon sirtida yotadi. Agar $AB = a$ bo‘lsa, silindr asosining radiusini toping.

115. To‘rtburchakli muntazam $SABCD$ piramida asosining tomoni a, yon qirrasi $\frac{5}{2}a$. Bir asosi SAB tekislikda yotib, ikkinchi asosi piramida kesimiga ichki chizilgan silindrning yon sirtini toping.

116. Silindrning balandligi $3r$. Silindrning ichida har birining radiusi r dan bo‘lgan uchta sfera shunday joylashtirilganki, har bir sfera qolgan ikkita sferaga va silindrning yon sirtiga urinadi. Sferalarning ikkitasi silindrning pastki asosiga, uchinchisi esa yuqori asosiga urinadi. Silindr asosining radiusini toping.

117. Muntazam $ABCA_1B_1C_1$ prizma har bir qirrasining uzunligi a. A va A_1 uchlar silindr yon sirtida yotib, BCC_1 tekislik shu silindrning yon sirtiga urinadi. Agar silindrning o‘qi B_1C to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, silindr asosining radiusini toping.

118. Radiusi 2 bo‘lgan sferada har birining radiusi 1 bo‘lib, har biri qolgan ikkitasiga urinadigan uchta aylana joylashgan. Shu sferada joylashgan va uchala aylananing har biriga urinuvchi kichik aylananing radiusini toping.

119. Muntazam tetraedrning bir uchi silindrning o‘qida, qolgan uchlari esa yon sirtida yotadi. Agar silindr asosining radiusi R bo‘lsa, tetraedrning qirrasini toping.

120. Muntazam $SABCD$ piramida $ABCD$ asosining A uchi konusning uchi bilan ustma-ust tushadi; B va D uchlari konusning yon sirtida, S uchi konus asosining aylanasida va C uchi asos tekisligida yotadi. Konus hajmining piramida hajmiga nisbatini toping.

121. Konus o‘q kesimining uchidagi burchagi 60°. Konusning ichida har birining radiusi 1 bo‘lgan uchta sfera joylashgan bo‘lib, har bir sfera qolgan ikki sferaga, konus yon sirtiga va asosiga urinadi. Konus asosining radiusini toping.

122. Har birining radiusi 1 bo‘lgan to‘rtta sfera juft-juft urinishi ma’lum bo‘lsa,

a) sferalarning har biriga urinadigan sfera radiusini;
b) uchta sfera bir asosiga va yon sirtiga, to‘rtinchi sfera ikkinchi asosiga uinadigan silindrning balandligini;
d) har biri yon sirtiga va uchta asosiga urinadigan konus balandligini toping.

123. Konus ichiga har birining radiusi r bo‘lgan beshta shar joylashtirilgan. Ularning to‘rttasi konus asosida yotib, har biri shu to‘rt sferadan ikkitasiga va konus yon sirtiga urinadi. Beshinchi shar konusning yon sirtiga va qolgan to‘rtala sharga urinadi. Konusning hajmini toping.

124. To‘rtta sfera bitta nuqtani yashira oladimi?

125. Sirtida uchta juft-juft perpendikular yasovchilar o‘tkazish mumkin bo‘lgan konus o‘q kesimining uchidagi burchakni toping.

126. Umumiy uchga ega ikkitateng konusning balandliklari 2 dan va asoslarining radiuslari 1 dan. Bu konuslar yasovchilardan biri bo‘ylab urinib, yon sirtlari bilan α tekislikka urinadi. Konuslar asoslarining kesishish chizig‘i l bo‘lsin. l to‘g‘ri chiziq va α tekislik orasidagi burchakni toping.

127. Ikki teng konusning uchlari umumiy bo‘lib, yasovchilardan biri bo‘ylab urinishadi. Har birining o‘q kesimi uchidagi burchak 60°. Konuslarga urinadigan, lekin ularning umumiy yasovchisidan o‘tmaydigan tekisliklar orasidagi burchakni toping.

128. Tekislikda umumiy uchga ega uchta konus yotibdi. Ularning har biri qolgan ikkitasiga urinadi. Har bir konusning uchidagi burchakni toping.

129. Umumiy D uchga ega ikki konus α tekislikka turli tomonlardan DE va DF yasovchilar bo‘ylab urinadi. Agar $\angle DEF = \gamma$, konuslar asoslarining tekisliklari kesishish chizig‘i va α tekislik orasidagi burchak β bo‘lsa, konuslarning balandliklari va yasovchilari orasidagi burchakni toping.

130. Umumiy uchga ega bo‘lgan ikki konusdan birining yasovchisi ikkinchisining balandligi. Birinchi konus o‘q kesimining uchidagi burchak $\arccos\frac{1}{3}$, ikkinchisiniki esa $\frac{2\pi}{3}$. Konuslar yon sirtlari kesishadigan yasovchilar orasidagi burchakni toping.

131. O‘q kesimining uchidagi burchaklar α dan ($\alpha < \frac{2\pi}{3}$) bo‘lgan uchta konus umumiy uchga ega va bir-biriga k, l va m yasovchilar bo‘ylab tashqi urinadi. l va k orasidagi burchakni toping.

132. Muntazam to‘rtburchakli piramida ichida markazlari piramidaning simmetriya o‘qida yotuvchi ikkita teng shar joylashtirilgan bo‘lib, har birining radiusi r. Sharlardan biri piramidaning barcha yon yoqlariga, ikkinchisi esa

piramida asosiga va birinchi sharga urinadi. Piramidaning hajmi balandlikning qanday qiymatida eng kichik bo‘ladi?

133. Muntazam $PABC$ piramida ABC asosining tomoni a, yon qirrasi b. BC va PA qirralarga parallel tekislik hosil qilgan kesimning yuzi eng kichik bo‘lishi uchun bu tekislik BC to‘g‘ri chiziqdan qancha masofada o‘tishi kerak?

134. $ABCD$ tetraedrning AB qirrasi to‘rtburchakli piramida asosining diagonali, CD qirrasi shu asosning ikkinchi diagonaliga parallel bo‘lib, oxirlari piramidaning yon qirralarida yotadi. Agar tetraedrning hajmi V bo‘lsa, to‘rtburchakli piramida hajmining eng kichik qiymatini toping.

135. Muntazam $ABCDA_1B_1C_1D_1$ piramida berilgan. $ABCD$ asosning tomoni $2a$ va yon qirrasi a. Oxirlaridan biri AA_1D_1D yoqning AD_1 diagonalida va ikkinchi oxiri DB_1 diagonalda yotib, AA_1B_1B tekislikka parallel bo‘lgan kesmalarni qaraymiz.

a) AD_1 diagonalning $AM: AD_1 = 2:3$ bo‘ladigan M nuqtasidan chiquvchi kesmaning uzunligini toping.

b) Shunday kesmalardan uzunligi eng kichigining uzunligini toping.

136. Tetraedr istalgan yog‘ining yuzi qolgan yoqlarining yuzlari yig‘indisidan kichik ekanligini isbotlang.

137. Muntazam tetraedrning tekislikdagi proyeksiyasi eng katta yuzaga ega bo‘lishi uchun bu tekislik tetraedrning ayqash qirralariga parallel bo‘lishi kerakligini isbotlang.

138. Fazoviy to‘rtburchak burchaklarining yig‘indisi 360° dan oshmasligini isbotlang.

139. Uch yoqli burchak ichki ikki yoqli burchaklarining yig‘indisi π dan katta, lekin 3π dan kichik ekanligini isbotlang.

140. Uch yoqli burchak uchun kosinuslar teoremasi. Agar uch yoqli burchakning tekis burchaklari α, β va γ, bu burchaklar qarshisidagi ikki yoqli burchaklar mos ravishda A, B va C bo‘lsa,

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

ekanligini isbotlang.

141. ABC uchburchak tekisligiga MC perpendikular o‘tkazilgan bo‘lsin. $\angle AMB < \angle ACB$ ekanligi rostmi?

142. Qavariq ko‘pyoqli burchakning tekis burchaklari yig‘indisi 360° dan kichikligini isbotlang.

143. Tetraedr uchun kosinuslar teoremasi. Tetraedr istalgan yog‘i yuzining kvadrati qolgan yoqlar yuzlar kvadratlari yig‘indisidan shu yoqlar yuzlari juft-juft ikkilangan ko‘paytmasini shu yoqlar orasidagi ikki yoqli burchak kosinusiga ko‘paytirilganini ayirish natijasiga teng:

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2\cos\alpha_{12} - 2S_2S_3\cos\alpha_{23} - 2S_1S_3\cos\alpha_{13}.$$

144. $ABCD$ tetraedrning A uchidagi barcha tekis burchaklar 60° dan. $AB + AC + AD \leq BC + CD + DB$ ekanligini isbotlang.

145. $ABCD$ piramidaning asosi teng tomonli ABC uchburchak. Agar $\angle BAD = \angle CBD = \angle ACD$ bo‘lsa, piramidaning muntazam ekanligini isbotlang.

146. Kavalyeri qoidasi. Agar ikki geometrik jismni fazoda biror berilgan tekislikka parallel tekislik bilan kesganda tengdosh tekis shakllar hosil bo‘ladigan

qilib joylashtirish mumkin bo‘lsa, bu jismlarning hajmlari teng bo‘ladi. Shu qoida yordamida shar hajmi uchun formulani keltirib chiqaring.

147. Qavariq ko‘pyoq boshqa qavariq ko‘pyoq ichida yotadi. Tashqi ko‘pyoqning to‘la sirti ichki ko‘pyoqning to‘la sirtidan katta ekanligini isbotlang.

148. Sharning uni kesib o‘tuvchi ikki parallel tekislik orasidagi bo‘lagi shar qatlami deyiladi. Radiusi R bo‘lgan sharning h balandlikdagi (kesuvchi tekisliklar orasidagi masofa) qatlamining sferik sirti yuzi $2\pi Rh$ ekanligini isbotlang.

MUNDARIJA

So‘zboshi 3
I QISM. Maktab geometriyasiga oid asosiy ma’lumotlar 6
Planimetriya 6
Sirkul va chizg‘ich yordamida yasashga doir masalalar. 14
Stereometriya 15
Aksiomalar bilan bevosita bog‘liq faktlar 15
Fazoda parallellik 15
Ayqash to‘g‘ri chiziqlar 16
Parallel proeksiyalash 17
Fazoda koordinatalar va vektorlar 17
To‘g‘ri chiziq va tekislikning perpendikulyarligi. 19
Ikki yoqli burchak 20
Ko‘pyoqli burchaklar 20
Sfera. Urinma tekislik. Urinuvchi sferalar 21
Muntazam piramida 21
Ko‘pyoq sirtining yuzi 22
Ko‘pyoqlarning hajmlari 22
Aylanish jismlarining sirti va hajmi 23
II QISM. Elementar geometriyaning tanlangan masalalari va teoremalari 24
Planimetriya 24
Yasashga doir masalalar 35
Stereometriya 37

Ushbu kitob tarjimasini chop etish huquqi Moskva Uzluksiz Matematika Ta‘lim Markazi nashriyotiga, elektron shakl huquqi esa muallifga tegishlidir. Kitob elektron shaklda internet tarmog‘ida tarqatilishi uchun notijoriy maqsadda tarjima qilindi. Undan har qanday shakldagi tijoriy maqsadda foydalanish yuqorida ko‘rsatilgan nashriyot tomonidan javobgarlikka tortilish uchun sabab bo‘ladi.

R. K. Gordin

BUNI HAR BIR YOSH MATEMATIK BILISHI KERAK

Tarjimonlar:

Doston MUSURMONOV

Qilichali ABDULLAYEV

Elvira ADJIUMEROVA

Shoxsanam IBRAGIMOVA

Muharrirlar:

Erkin ALIYEV

Dilmurod TAYLAKOV

Dizayner:

Sharof SOLIYEV

Ijodiy jamoa:

Sanjar ASLANOV

Muhammadyusuf KOMILJONOV

Azizxon ISHANXONOV

2020 yil